SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN TOÁN - ĐỀ GỐC

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\cot x-\sqrt{3}}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{2\pi}{3}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{1}{\cot x-\sqrt{3}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cot x\neq\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2: Một lớp học có 20 học sinh nam và 26 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 lớp phó văn thể. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong ban cán sự đó có ít nhất một học sinh nam?

A. 12460. **B.** 75480. **C.** 12580. **D.** 75580.

Lời giải

Chọn B

Có A_{46}^{3} cách chọn ba học sinh trong lớp vào các chức vụ đã nêu.

Có A_{26}^{3} cách chọn ban cán sự không có nam (ta chọn nữ cả).

Do đó, có $A_{46}^{3}-A_{26}^{3}=75480$ cách chọn thoả mãn yêu cầu.

Câu 3: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên. Tính tổng các phần tử của S.

A. 4. **B.** 3. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Vì $\begin{cases}\lim\dfrac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\dfrac{a-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow S=\{1;6;13\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 20.

Câu 4: Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m\geq 0$.

Lời giải

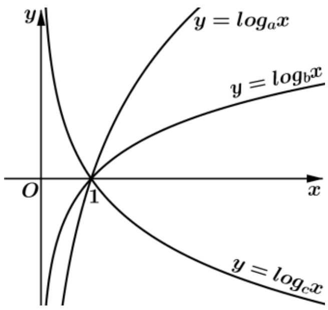
Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3(m+1)$

$YCBT\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=-9m\leq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Câu 5: Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=\log_c x$.

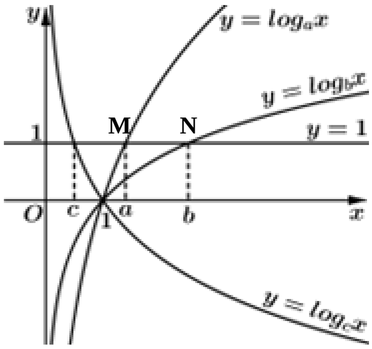


Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

Lời giải

Chọn D



Theo hình dạng của đồ thị ta có $\begin{cases} a,b > 1 \\ 0 < c < 1 \end{cases}$.

Vẽ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ lần lượt tại 2 điểm $M(a;1)$, $N(b;1)$. Ta thấy điểm N bên phải điểm M nên $b > a$.

Vậy $c < a < b$.

Câu 6: Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng:

A. 180°. **B.** 240°. **C.** 324°. **D.** 360°.

Lời giải

Chọn B

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều, mỗi mặt là tam giác đều. Tại mỗi đỉnh có 4 góc 60° nên tổng các góc phẳng bằng 240°.

Câu 7: Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $ACB = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $AC = AB.\cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

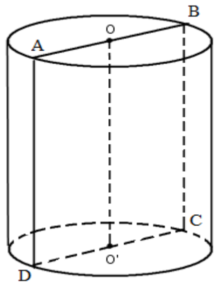
Vậy thể tích khối nón là : $V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 54π. **D.** 27π.

Lời giải

Chọn B



Giả sử thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABCD$.
Theo giả thiết ta có bán kính đáy của hình trụ $r=3 \Rightarrow h=AD=DC=2r=6=l$.
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.3.6=36\pi$.

Câu 9: Họ nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^x\left(2+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là:

A. $2\mathrm{e}^x+\tan x+C$. **B.** $2\mathrm{e}^x-\tan x+C$. **C.** $2\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\cos x}+C$. **D.** $2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\cos x}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=e^x\left(2+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)=2e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \int y dx=\int\left(2e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=2e^x+\tan x+C$.

Câu 10: Giả sử $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x$ (trong đó a,b,c là các hằng số) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$ trên $\mathbb{R}$. Tính tích $P=abc$.

A. $P=-4$. **B.** $P=1$. **C.** $P=5$. **D.** $P=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $F'(x)=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x=\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x$.

Do $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ nên ta có hệ: $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy $P=abc=-4$.

Câu 11: Cho tập $S=\{1;2;...;39;40\}$ gồm 40 số tự nhiên từ 1 đến 40. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S. Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là:

A. $\dfrac{5}{38}$. **B.** $\dfrac{7}{38}$. **C.** $\dfrac{1}{26}$. **D.** $\dfrac{19}{39}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega)=C_{40}^3$.
Gọi A là biến cố: "ba số lấy được lập thành cấp số cộng ".
Giả sử ba số $a,\ b,\ c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, khi đó ta có $a+c=2b$. Hay $a+c$ là một số chẵn và mỗi cách chọn 2 số a và c thỏa mãn $a+c$ là số chẵn sẽ có duy nhất cách chọn b. Số cách chọn hai số có tổng chẵn sẽ là số cách chọn ba số tạo thành cấp số cộng.
TH1: Hai số lấy được đều là số chẵn, có: C_{20}^2 cách lấy.
TH2: Hai số lấy được đều là số lẻ, có: C_{20}^2 cách lấy.
$\Rightarrow n(A)=C_{20}^2+C_{20}^2$

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{20}^2+C_{20}^2}{C_{40}^3}=\dfrac{1}{26}$.

Câu 12: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1$. Tính giá của biểu thức $P=a^2-2b^3$.

A. $P=32$. **B.** $P=0$. **C.** $P=16$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Chọn B

TH1: $b=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax+1}{\sqrt{4x^2+ax+1}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}=-\dfrac{a}{4}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1\Leftrightarrow-\dfrac{a}{4}=-1\Rightarrow a=4$.

TH2: $b\neq2\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{4+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+b\right)\right]=\begin{cases}-\infty \text{ khi } b>2\\ +\infty \text{ khi } b<2\end{cases}$

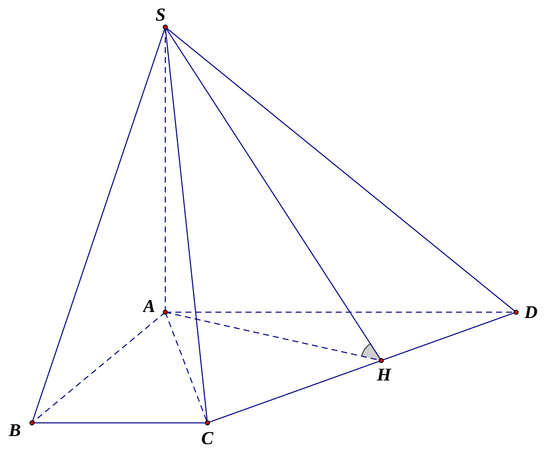
Vậy $a=4,b=2\Rightarrow P=a^2-2b^3=0$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB=AD=2a$, $BC=a$, $SA=a\sqrt{5}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Khi đó giá trị *tang* của góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AH\perp CD$ tại $H\Rightarrow CD\perp(SAH)$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là góc SHA

Ta tính được: $CD=a\sqrt{5}$ và $S_{ABCD}=3a^2$; $S_{\Delta ABC}=a^2\Rightarrow S_{\Delta ACD}=2a^2$

$\Rightarrow AH=\dfrac{2.S_{\Delta ACD}}{CD}=\dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$

Khi đó $\tan SHA=\dfrac{SA}{AH}=a\sqrt{5}:\dfrac{4a}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^3+2x^2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=\left[-1;+\infty\right)\backslash\{0\}$.

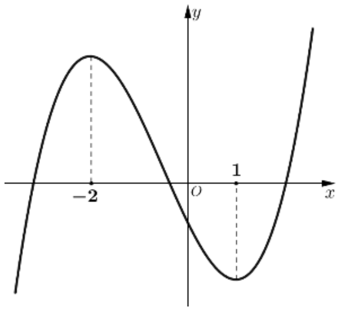
Ta có:

$$\lim_{x\to 0^-} y=\lim_{x\to 0^-}\frac{25x^2+9x}{\left(x^3+2x^2\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{25x+9}{x\left(x+2\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=-\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} y=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

Vậy đồ thị của hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$ và 1 tiệm cận đứng $x=0$.

Câu 15: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>0,b<0,c<0,d<0$.
B. $a>0,b>0,c<0,d>0$.
C. $a<0,b>0,c>0,d<0$.
D. $a>0,b>0,c<0,d<0$.

Lời giải

Chọn D

Từ dạng đồ thị suy ra $a>0$.Từ giao điểm của đồ thị với trục tung ta có $d<0$.

Mặt khác $y'=3ax^2+2bx+c$ từ đồ thị ta có phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow ac<0$ mà $a>0\Rightarrow c<0$.

Hơn nữa phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt có tổng $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}=-1<0 \Rightarrow b>0$.

Vậy $a>0,b>0,c<0,d<0$.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$.
B. $m=5$.
C. $m=-7$.
D. $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$; $y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right. \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m=5.$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(x^2+3x+2\right)^{\frac{3m-3}{m+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 8.
B. 6.
C. 7.
D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $x^2+3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-1 \end{array}\right.$ nên để hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$ thì số mũ $\dfrac{3m-3}{m+1}$ là số nguyên dương.

Ta có: $\dfrac{3m-3}{m+1}=3-\dfrac{6}{m+1}\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow m+1\in\{-6;-3;-2;-1;3;6\}$

Do đó có 6 giá trị là $m\in\{-7;-4;-3;-2;2;5\}$.

Câu 18: **Bất phương trình** $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right)\geq 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P=3a+b$.

A. $P=-6$. **B.** $P=10$. **C.** $P=4$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3}>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3}>0 \\ \dfrac{3x-7}{x+3}<1 \\ \dfrac{3x-7}{x+3}\leq\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3}>0 \\ \dfrac{3x-7}{x+3}\leq\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3}>0 \\ \dfrac{8(x-3)}{3(x+3)}\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{7}{3} \\ x<-3 \end{array}\right. \\ -3<x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{3}<x\leq 3 \text{ hay } x\in\left(\frac{7}{3};3\right].$$ **Suy ra** $a=\dfrac{7}{3}$; $b=3$.

Vậy $P=3a+b=3.\dfrac{7}{3}+3=10$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+2}$. Khi đó tổng $f(0)+f\left(\dfrac{1}{12}\right)+f\left(\dfrac{2}{12}\right)+...+f\left(\dfrac{22}{12}\right)+f\left(\dfrac{23}{12}\right)$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{71}{6}$. **B.** $\dfrac{65}{6}$. **C.** $\dfrac{59}{6}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Với $a+b=2$, ta có $f(a)+f(b)=\dfrac{2^a}{2^a+2}+\dfrac{2^b}{2^b+2}$

$$=\frac{2^a.2^b+2.2^a+2^a.2^b+2.2^b}{(2^a+2)(2^b+2)}=\frac{2^{a+b}+2.2^a+2^{a+b}+2.2^b}{2^{a+b}+2.2^a+2.2^b+4}=\frac{4+2.2^a+4+2.2^b}{4+2.2^a+2.2^b+4}=1.$$

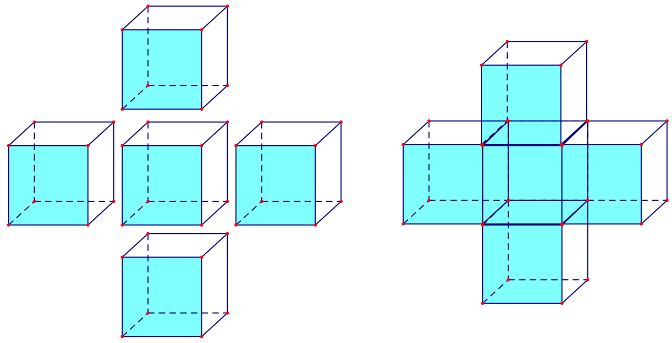
Do đó với $a+b=2$ thì $f(a)+f(b)=1$. Áp dụng ta được

$$f(0)+f\left(\frac{1}{12}\right)+f\left(\frac{2}{12}\right)+f\left(\frac{3}{12}\right)+...+f\left(\frac{23}{12}\right)$$

$$=f(0)+\left[f\left(\frac{1}{12}\right)+f\left(\frac{23}{12}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{12}\right)+f\left(\frac{22}{12}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{11}{12}\right)+f\left(\frac{13}{12}\right)\right]+f(1)$$

$$=\frac{1}{3}+11.1+\frac{2}{4}=\frac{71}{6}.$$

Câu 20: Người ta ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối hộp chữ thập như hình dưới. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập đó.



A. $S_{tp} = 20a^2$. **B.** $S_{tp} = 12a^2$. **C.** $S_{tp} = 30a^2$. **D.** $S_{tp} = 22a^2$.

Lời giải

Chọn D

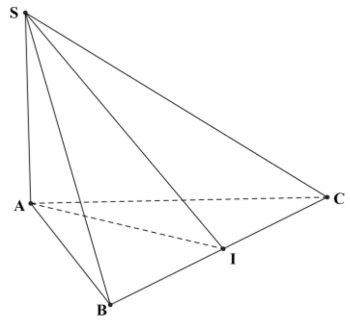
Diện tích toàn phần của 5 khối lập phương là $5.6a^2 = 30a^2$.
Khi ghép thành khối hộp chữ thập, đã có $4.2 = 8$ mặt ghép vào phía trong, do đó diện tích toàn phần cần tìm là $30a^2 - 8a^2 = 22a^2$.

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



➢ Gọi I là trung điểm BC.
$+$ Do ΔABC cân tại A nên $BC \perp AI$
$+$ Mặt khác do $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$. Suy ra $BC \perp SI$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy chính là góc $\widehat{SIA} = 45°$.

➢ Xét ΔAIB vuông tại I có $IB = a$, $\widehat{IAB} = 60°$, suy ra $IA = \dfrac{IB}{\tan 60°} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

ΔSAI vuông tại A có $IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\widehat{SIA} = 45°$ nên ΔSAI vuông cân tại A, do đó $SA = IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

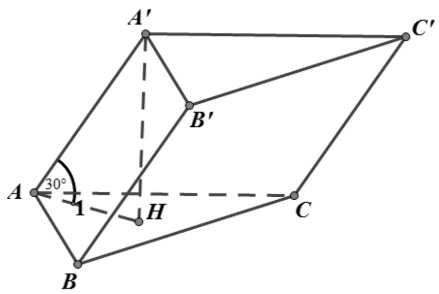
➢ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BC.AI.SA = \dfrac{a^3}{9}$.

Câu 22: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6a$, cạnh bên bằng $2a\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $9a^3$. **B.** $27a^3$. **C.** $27\sqrt{3}.a^3$. **D.** $9\sqrt{3}.a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $A'AH = 30°$ là góc giữa AA' và mặt đáy.

Ta có: $\sin 30° = \dfrac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A\sin 30° = 2\sqrt{3}a.\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}a$.

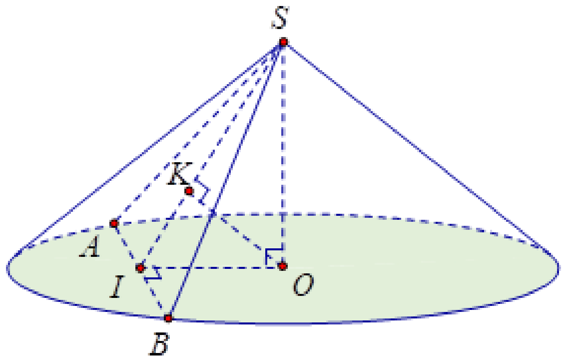
Khi đó: $V_{ABC.A'B'C} = (6a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3}a = 27a^3$.

Câu 23: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20(\text{cm})$, bán kính đáy $r = 25(\text{cm})$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(\text{cm})$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 500(\text{cm}^2)$. **B.** $S = 400(\text{cm}^2)$. **C.** $S = 300(\text{cm}^2)$. **D.** $S = 406(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A



Theo bài ra ta có $AO = r = 25$; $SO = h = 20$; $OK = 12$ (Hình vẽ).

Lại có $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OI = 15(\text{cm})$

$AB = 2AI = 2.\sqrt{25^2 - 15^2} = 40(\text{cm})$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25(\text{cm}) \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.25.40 = 500(\text{cm}^2)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \text{e}^x + \int\limits_0^1 xf(x).\text{d}x$. Giá trị của $f(\ln 2023)$ bằng:

A. 2025. **B.** 4046. **C.** 2024. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Từ $f(x) = \text{e}^x + \int\limits_0^1 xf(x)\text{d}x$ (1). Lấy đạo hàm hai vế của (1), suy ra $f'(x) = \text{e}^x$.

Khi đó $f(x) = \int f'(x)\text{d}x = \int \text{e}^x\text{d}x = \text{e}^x + C$ (2)

Từ (1) và (2) suyra: $C = \int\limits_0^1 xf(x)\text{d}x \Leftrightarrow C = \int\limits_0^1 x(\text{e}^x + C)\text{d}x \Leftrightarrow C = \int\limits_0^1 x\text{e}^x\text{d}x + \int\limits_0^1 Cx\text{d}x$

$\Leftrightarrow C = \left(x\text{e}^x - \text{e}^x\right)\Big|_0^1 + \dfrac{Cx^2}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow C = 1 + \dfrac{C}{2} \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $f(x)=e^x+2 \Rightarrow f(\ln 2023)=e^{\ln 2023}+2=2023+2=2025$.

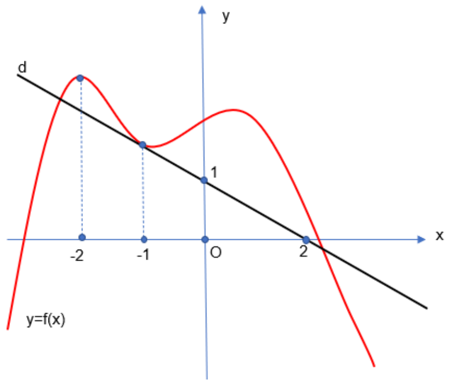
Cách 2. Đặt $A=\int_0^1 xf(x).dx \Rightarrow f(x)=e^x+A$

$$\Rightarrow A=\int_0^1 x\left(e^x+A\right).dx=\int_0^1 x.e^x.dx+A\int_0^1 x.dx=\left(x.e^x-e^x\right)\Big|_0^1+A\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1+\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow A=2 \Rightarrow f(x)=e^x+2$$

$$\Rightarrow f(\ln 2023)=e^{\ln 2023}+2=2025.$$

Câu 25: Biết $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và đạt cực đại tại $x=-2$. Đường thẳng d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ (như hình vẽ). Tính tích phân $\int_0^1 2x.f''\left(x^2-2\right)dx$.



A. $-\frac{1}{2}$.　　**B.** $\frac{1}{2}$.　　**C.** -2.　　**D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^2-2 \Rightarrow dt=2xdx$.

Với $x=0 \Rightarrow t=-2$.

Với $x=1 \Rightarrow t=-1$.

Ta có $I=\int_{-2}^{-1} f''(t)dt=f'(t)\Big|_{-2}^{-1}=f'(-1)-f'(-2)$ (1)

Vì hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ nên $f'(-2)=0$ (2).

Theo hình vẽ d đi qua điểm $(2;0)$ và $(0;1)$ nên phương trình đường thẳng d : $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Vì đường thẳng d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=-1$ (như hình vẽ) nên $f'(-1)$ là hệ số góc của đường thẳng d. Suy ra $f'(-1)=-\frac{1}{2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $I=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$.

Câu 26: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(1+\cos x)(\cos 4x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tính $T=a+b$.

A. $T=0$.　　**B.** $T=1$.　　**C.** $T=-\frac{1}{2}$.　　**D.** $T=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(1+\cos x)(\cos 4x - m\cos x) = m\sin^2 x \Leftrightarrow (1+\cos x)(\cos 4x - m\cos x) - m(1-\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[\cos 4x - m\cos x - m(1-\cos x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \\ \cos 4x = m\end{array}\right.$.

➢ Xét phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\cos x = -1$ không có nghiệm trong đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

➢ Xét phương trình $\cos 4x = m$. Đặt $f(x) = \cos 4x$. Ta có: $f'(x) = -4\sin 4x$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{4} \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Xét trong đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì ta có: $x \in \left\{0;\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

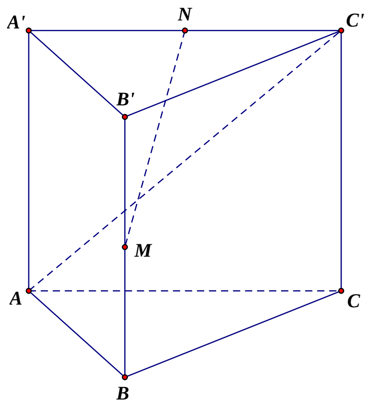
Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\cos 4x = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trong đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi $-\dfrac{1}{2} \le m < 1$ hay $m \in \left[-\dfrac{1}{2};1\right) \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}, b = 1$.

Vậy $T = a + b = \dfrac{1}{2}$.

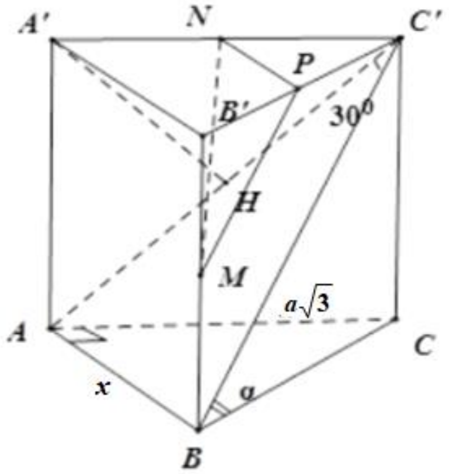
Câu 27: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$ và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BB' và $A'C'$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa MN và AC' bằng:



A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



+) Ta có: $\left(BC';\left(ACC'A'\right)\right)=BC'A=30^\circ$; $\left(BC';\left(ABC\right)\right)=C'BC=\alpha$.

+) Đặt $AB=x>0\Rightarrow BC=\sqrt{3a^2+x^2}\Rightarrow CC'=BC.\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{3\left(3a^2+x^2\right)}{5}}$

Và $AC'=AB.\cot 30^\circ=x\sqrt{3}$.

+) Mặt khác: $AC^2+CC'^2=AC'^2\Rightarrow x=a\sqrt{2}\Rightarrow CC'=a\sqrt{3}\Rightarrow AC'=a\sqrt{6}$.

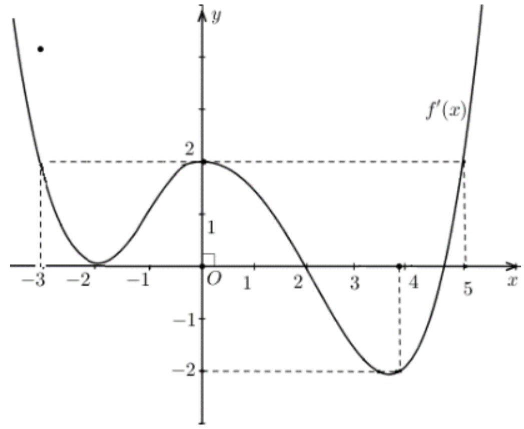
+) Gọi P là trung điểm của $B'C'$ $\Rightarrow\left(MNP\right)//\left(ABC'\right)$ nên

$d\left(MN;AC'\right)=d\left(MN;\left(ABC'\right)\right)=d\left(N;\left(ABC'\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A';\left(ABC'\right)\right)$.

+) Dựng $A'H\perp AC'\Rightarrow A'H\perp\left(ABC'\right)\Rightarrow d\left(A';\left(ABC'\right)\right)=A'H=\dfrac{1}{2}AC'=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $d\left(MN;AC'\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(-3)=2f(5)=4$. Gọi M,n lần lượt là các giá trị nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Tính $M-n$.



A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\dfrac{1}{2}f(x)-m=u\Rightarrow\begin{cases}f(x)=2u+2m\\f(u)=2x+2m\end{cases}\Rightarrow f(u)+2u=f(x)+2x$.

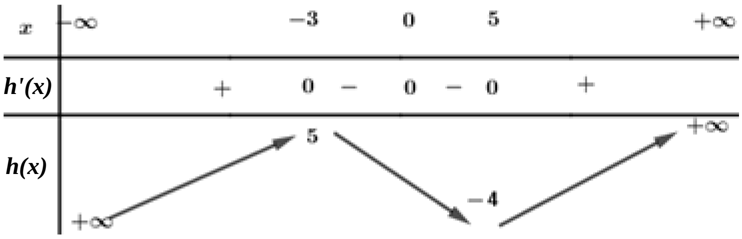
Xét hàm số $g(t)=f(t)+2t\Rightarrow g'(t)=f'(t)+2\geq -2+2=0\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow u = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x) - m = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x) - x = m$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{2}f(x) - x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - 1$.

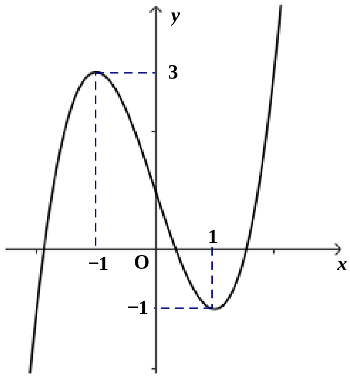
$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \Rightarrow h(-3) = \frac{1}{2}f(-3) - (-3) = 5 \\ x = 0 \\ x = 5 \Rightarrow h(5) = \frac{1}{2}f(5) - (5) = -4 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = \frac{1}{2}f(x) - x$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có 3 nghiệm khi $-4 < m < 5$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow M - n = 7$.

Câu 29: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực đại của hàm số $y = [xf(x-1)]^2$ là:



A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

◆ Đặt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có: đồ thị giao với trục Oy tại điểm $(0;1) \Rightarrow d = 1$.

◆ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $(-1;3)$; $(1;-1)$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + 1 = -1 \\ -a + b - c + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

$\Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 - 3(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 3x^2 - 6x$.

◆ Đặt $g(x) = [xf(x-1)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2xf(x-1)[f(x-1) + xf'(x-1)]$.

$\Rightarrow g'(x)=2x(x^3-3x^2+3)(4x^3-9x^2+3)$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-3x^2+3=0 \\ 4x^3-9x^2+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\approx 2,532 \\ x\approx 1,347 \\ x\approx -0,879 \\ x\approx 2,076 \\ x\approx 0,694 \\ x\approx -0,52 \end{array}\right.$.

Nhận thấy: $g'(x)$ là đa thức bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(g'(x))=+\infty$ và dựa vào bảng xét dấu của $g(x)$ suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $d_1,\ d_2$ lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=x.f(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng $d_1,\ d_2$ vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $2\le|f(1)|<2\sqrt{2}$. **B.** $|f(1)|\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}<|f(1)|<2$. **D.** $|f(1)|\le\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì d_1 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_1 có hệ số góc $k_1=f'(1)$.

Ta có $[xf(2x-1)]'=f(2x-1)+2xf'(2x-1)$.

Vì d_2 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_2 có hệ số góc $k_2=f(1)+2f'(1)$.

Mặt khác, hai đường thẳng $d_1,\ d_2$ vuông góc với nhau nên $k_1.k_2=-1$.

Suy ra $2[f'(1)]^2+f'(1).f(1)=-1$.

Suy ra $2\left[f'(1)+\frac{1}{4}f(1)\right]^2=\frac{1}{8}[f(1)]^2-1 \Rightarrow \frac{1}{8}[f(1)]^2-1\ge 0 \Rightarrow |f(1)|\ge 2\sqrt{2}$.

Câu 31: Cho các số thực $x,\ y$ thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Giá trị $M-m$ bằng:

A. $-4-4\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $6+4\sqrt{2}$. **D.** $4+2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{5x-y+2}{x+y+4}$. Theo giả thiết, $x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2=1$

nên ta đặt $\begin{cases} \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \\ \sin\varphi=\frac{1}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi \\ x+y=2\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi \end{cases}$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Khi đó, $t=\frac{2\sqrt{3}\cos\varphi+4\sin\varphi+2}{2\sin\varphi+4} \Leftrightarrow (t-2).\sin\varphi-\sqrt{3}.\cos\varphi=1-2t \quad (1)$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (t-2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2 \ge (1-2t)^2 \Leftrightarrow 3t^2-6\le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le t\le \sqrt{2}$.

Xét hàm số $Q=f(t)=2t^3-3t^2+1,\ t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

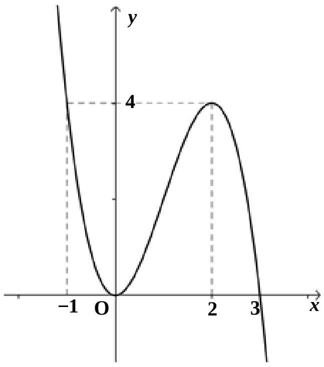
$f'(t)=6t^2-6t$. Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ t=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$.

$f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$; $f(0)=1$; $f(1)=0$; $f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} M=\max Q=\max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t)=f(0)=1 \\ m=\min Q=\min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy $M-m=6+4\sqrt{2}$.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2mx+m^2+m+1\right)\sqrt{x^2-3x}}{(x-4)\left[f^2(x)-4f(x)\right]}$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Tính tổng các phần tử của tập S.



A. -2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left(x^2-2mx+m^2+m+1\right)\sqrt{x^2-3x}}{(x-4)\left[f^2(x)-4f(x)\right]}$

Biểu thức $\sqrt{x^2-3x}$ xác định khi $x^2-3x\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

Xét phương trình:

$(x-4)\left[f^2(x)-4f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ f^2(x)-4f(x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ f(x)=0 \\ f(x)=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=2\,(KTM)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=0\end{array}\right.$

+ Đặt $h(x)=x^2-2mx+m^2+m+1$. Nếu $h(x)$ không có nghiệm thuộc $\{-1;0;3;4\}$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 tiệm cận đứng. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x=4$ là nghiệm của $h(x)\Rightarrow m^2-7m+17=0$ (vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x=3$ là nghiệm của $h(x)\Rightarrow m^2-5m+10=0$ (vô nghiệm).

Trường hợp 3: $x=-1$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2+3m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 4: $x=0$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2+m+1=0$ (vô nghiệm).

Như vậy khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận đứng hay $S=\{-2;-1\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng -3.

Câu 33: Gọi M, n lần lượt là các giá trị nguyên dương lớn nhất và nhỏ nhất của m để phương trình: $2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\cos^3 x+6\sin^2 x+9\cos x+m-6\right)2^{\cos x-2}=2^{\cos x+1}+1$ có nghiệm thực. Khi đó $M-n$ bằng:

A. 20. **B.** 28. **C.** 18. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có PT tương đương với: $2^{\cos x-2+\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left[(\cos x-2)^3+m-3\cos x\right]2^{\cos x-2}=1$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3\cos x}}+\left(\sqrt[3]{m-3\cos x}\right)^3=2^{2-\cos x}+(2-\cos x)^3$ (vì $2^{2-\cos x}>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3\cos x}=2-\cos x$ (Xét hàm số $g(u)=2^u+u^3$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$).

$\Leftrightarrow -\cos^3 x+6\cos^2 x-9\cos x+8=m$.

Đặt $\cos x=t$ với điều kiện $t\in[-1;1]$, xét hàm số $f(t)=-t^3+6t^2-9t+8$.

Dễ thấy $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=4$ và $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=24$ nên PT đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[4;24]$.

Vậy $M-n=24-4=20$.

Câu 34: Cho m, n là các số thực lớn hơn 1, thay đổi và thỏa mãn $m+n=\frac{13}{2}$. Gọi a,b là hai nghiệm phân biệt của phương trình $8\log_m x.\log_n x-7\log_m x-6\log_n x-2023=0$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\ln(ab)$ là $\frac{3}{4}\ln\left(\frac{c}{2}\right)+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{d}{2}\right)$ với c,d là các số nguyên dương. Tính tổng $S=2c+3d$.

A. $S=2023$. **B.** $S=33$. **C.** $S=25$. **D.** $S=50$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>0$.

Ta có: $8\log_m x.\log_n x-7\log_m x-6\log_n x-2023=0$

$\Leftrightarrow 8\log_n m.(\log_m x)^2-(6\log_n m+7).\log_m x-2023=0$.

Do $m,n>1$ nên $8\log_n m>0$, do đó phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, gọi là a,b.

Theo Vi-et ta có:

$$\log_m a+\log_m b=\frac{6\log_n m+7}{8\log_n m} \Leftrightarrow \log_m(ab)=\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\log_m n \Leftrightarrow \log_m(ab)=\log_m\left(m^{\frac{3}{4}}.n^{\frac{7}{8}}\right)$$

$$\Leftrightarrow ab=m^{\frac{3}{4}}.n^{\frac{7}{8}} \Leftrightarrow ab=m^{\frac{3}{4}}.\left(\frac{13}{2}-m\right)^{\frac{7}{8}} \Rightarrow T=\ln(ab)=\frac{3}{4}\ln m+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{13}{2}-m\right).$$

Xét hàm số: $f(m)=\frac{3}{4}\ln m+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{13}{2}-m\right)$ với $m\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$.

Có $f'(m)=\frac{3}{4m}-\frac{7}{4(13-2m)} \Rightarrow f'(m)=0 \Leftrightarrow m=3\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$

$$\Rightarrow \max_{\left(1;\frac{11}{2}\right)} f(m)=f(3)=\frac{3}{4}\ln 3+\frac{7}{8}\ln\frac{7}{2}\Rightarrow T_{\max}=\frac{3}{4}\ln\left(\frac{6}{2}\right)+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

Do đó: $c=6,\ d=7\Rightarrow S=2c+3d=33$.

Câu 35: Cho $0\le x,y\le 1$ thỏa mãn $2022^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2023}{y^2-2y+2024}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=(5x^2+3y)(5y^2+3x)+25xy$. Khi đó $M-m$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{121}{100}$. **C.** $\dfrac{19}{16}$. **D.** $\dfrac{9}{100}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2022^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2023}{y^2-2y+2024}\Leftrightarrow\dfrac{2022^{1-y}}{2022^x}=\dfrac{x^2+2023}{(1-y)^2+2023}$

$\Leftrightarrow 2022^x(x^2+2023)=2022^{1-y}\left[(1-y)^2+2023\right]\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)$

Xét hàm số $f(t)=2022^t(t^2+2023)$ với $t>0$.

Có $f'(t)=2022^t.(t^2+2023)\ln 2022+2t.2022^t>0,\ \forall t>0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$, $\Rightarrow f(x)=f(1-y)\Leftrightarrow x=1-y\Leftrightarrow x+y=1$

Khi đó: $S=(5x^2+3y)(5y^2+3x)+25xy=25x^2y^2+9xy+15(x^3+y^3)+25xy$

$$=25(xy)^2+34xy+15\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]=25(xy)^2-11xy+15$$

Mà $1=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\le\dfrac{1}{4}$, nên đặt $t=xy\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$, khi đó $S=25t^2-11t+15$

Xét hàm số $f(t)=25t^2-11.t+15$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ ta được : $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=\dfrac{1379}{100}$, $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=15$

.

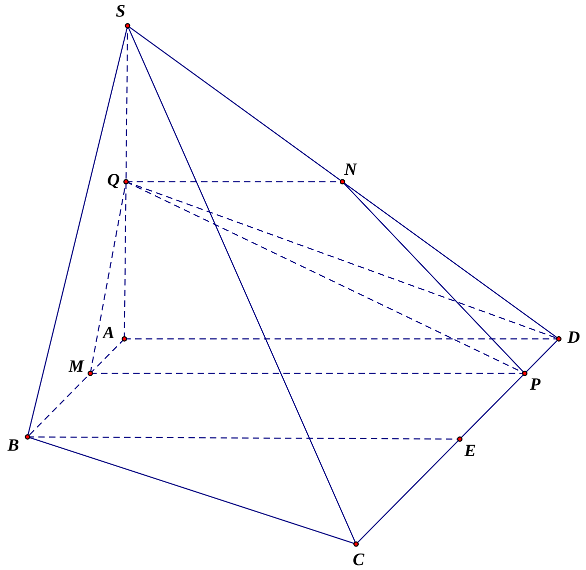
Vậy $M-m=\dfrac{121}{100}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB//CD,\ CD=2AB$. Gọi M là điểm di động trên cạnh AB $(M\ne A,\ M\ne B)$ và N là trung điểm của cạnh SD. Mặt phẳng (α) đi qua M,N và song song với AD chia khối chóp thành hai khối đa diện có tỉ lệ thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}$, trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B. Khi đó tỉ số $\dfrac{MA}{CD}=\dfrac{m}{n}$, trong đó: m và n là các số nguyên dương, $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tổng $m+n$ bằng:

A. 9. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{AM}{AB}=x$. Kẻ $MP//AD;\ NQ//AD\ \left(P\in CD,\ Q\in SA\right)$

$\Rightarrow\left(\alpha\right)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $MPNQ\ \left(MP//NQ\right)$.

Gọi E là trung điểm của $CD\Rightarrow ABED$ là hình bình hành.

Đặt S là diện tích hình bình hành $ABED$; h là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Gọi thể tích khối chóp $S.ABED$ là $V\ \Rightarrow V=\frac{1}{3}hS$.

Diện tích hình bình hành $AMPD$ là $S_{AMPD}=x.S$, $d\left(Q;\left(AMPD\right)\right)=\frac{1}{2}h$.

Thể tích khối chóp $Q.AMPD$ là $V_{Q.AMPD}=\frac{1}{3}d\left(Q;\left(AMPD\right)\right).S_{AMPD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}h.xS=\frac{1}{2}x.\frac{hS}{3}=\frac{1}{2}x.V$

Lại có $V_{S.AED}=\frac{1}{2}V\Rightarrow d\left(A;\left(SED\right)\right)=\frac{3V_{S.AED}}{S_{\Delta SED}}=\frac{\frac{3}{2}V}{S_{\Delta SED}}$.

Vì Q là trung điểm SA nên $d\left(Q;\left(SED\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A;\left(SED\right)\right)=\frac{\frac{3}{4}V}{S_{\Delta SED}}$

Diện tích ΔDPN: $S_{\Delta DPN}=\frac{1}{2}DN.DP.\sin NDP=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}DS.xDE.\sin NDP=\frac{x}{2}.S_{\Delta SED}$.

Thể tích khối chóp $Q.PDN$ là

$$V_{Q.PDN}=\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(Q;\left(SED\right)\right).S_{\Delta DPN}=\frac{1}{3}.\frac{\frac{3}{4}V}{S_{\Delta SED}}.\frac{x}{2}.S_{\Delta SED}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}V.\frac{x}{2}=\frac{xV}{8}.$$

$$\Rightarrow\ V_1=V_{Q.AMPD}+V_{Q.PND}=\frac{xV}{2}+\frac{xV}{8}=\frac{5xV}{8}.$$

$$V_2=\frac{3}{2}V-V_1=\frac{3}{2}V-\frac{5x}{8}V=\left(\frac{3}{2}-\frac{5x}{8}\right)V.$$

Theo giả thiết: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{5x}{8}V}{\left(\frac{3}{2}-\frac{5x}{8}\right)V}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{5x}{8}.3=\frac{3}{2}-\frac{5x}{8}\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{MA}{CD}=\frac{3}{10}$.

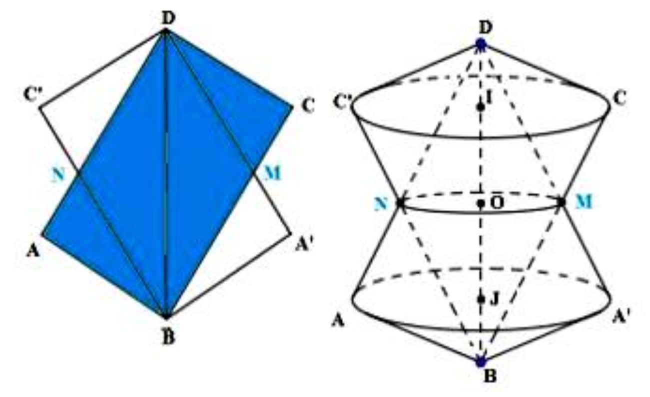
Vậy $\frac{MA}{CD}=\frac{3}{10}\ \Rightarrow m=3,n=10\Rightarrow m+n=13$.

Câu 37: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2,\ AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng:

A. $\dfrac{28}{3}$ **B.** $\dfrac{28\pi}{3}$ **C.** $\dfrac{56\pi}{9}$ **D.** $\dfrac{56}{9}$

Lời giải

Chọn C



ΔBCD vuông tại C có: $BD=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4;\ CI=\dfrac{BC.CD}{BD}=\dfrac{2\sqrt{3}.2}{4}=\sqrt{3};\ ID=1$

$IB=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3\Rightarrow IO=OD-ID=2-1=1$

$\dfrac{OM}{CI}=\dfrac{BO}{BI}\Rightarrow OM=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Thể tích khối nón có đỉnh D và đáy là hình tròn tâm I bán kính IC bằng:

$V_1=\dfrac{1}{3}\pi.IC^2.ID=\dfrac{1}{3}\pi.3.1=\pi$

Thể tích khối nón cụt có hai đáy là hình tròn tâm I bán kính IC, hình tròn tâm O bán kính OM bằng :

$V_2=\dfrac{\pi.OI}{3}\left(IC^2+OM^2+IC.OM\right)=\dfrac{\pi.1}{3}\left(3+\dfrac{4}{3}+\sqrt{3}.\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{19\pi}{9}$

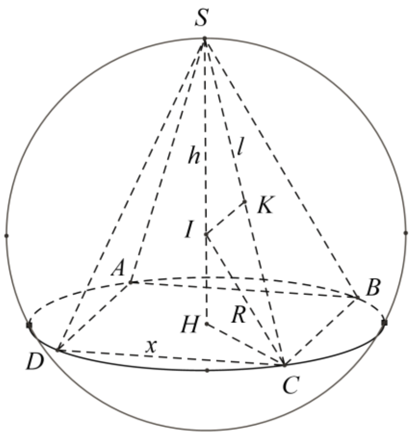
Thể tích cần tìm là: $V=2\left(V_1+V_2\right)=2\left(\pi+\dfrac{19\pi}{9}\right)=\dfrac{56\pi}{9}$.

Câu 38: Tính giá trị lớn nhất V của thể tích các khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính $R=3\sqrt{3}$.

A. $V=576\sqrt{3}$. **B.** $V=512\sqrt{3}$. **C.** $V=576$. **D.** $V=64\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu có tâm I và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Gọi $H = AC \cap BD$, K là trung điểm SC. Ta có $I \in SH$, $SI = R = 3\sqrt{3}$.
Đặt $AB = x; SH = h\ (x, h > 0)$.

Ta có $HC = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = SC = \sqrt{h^2 + \dfrac{x^2}{2}}$.

Do $\Delta SKI \backsim \Delta SHC \Rightarrow \dfrac{SK}{SH} = \dfrac{SI}{SC} \Rightarrow SC^2 = 2SH.SI \Leftrightarrow h^2 + \dfrac{x^2}{2} = 2h.3\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 12\sqrt{3}.h - 2h^2$.

Diện tích đáy của hình chóp $S_{ABCD} = x^2$ nên $V = \dfrac{1}{3}h.x^2 = \dfrac{1}{3}h\left(12\sqrt{3}.h - 2h^2\right)$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}h.\left(12\sqrt{3}.h - 2h^2\right) = \dfrac{1}{3}.h.h\left(12\sqrt{3} - 2h\right) \le \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{h + h + 12\sqrt{3} - 2h}{3}\right)^3 = 64\sqrt{3}$

$\Rightarrow V \le 64\sqrt{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h = h = 12\sqrt{3} - 2h \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$.

Vậy $V_{max} = 64\sqrt{3}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2x.f\left(x^2+1\right) + \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = (2x+1)\ln(x+1)$. Biết $\int\limits_1^{17} f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 - 2\ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + 3b + 2c$ bằng:

A. $\dfrac{37}{2}$. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2x.f\left(x^2+1\right) + \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = (2x+1)\ln(x+1)$.

Suy ra $\int\limits_1^4 \left[2x.f\left(x^2+1\right) + \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 (2x+1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_1^4 \left[2x.f\left(x^2+1\right) + \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\left(x^2+1\right) + \int\limits_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)$

$= \int\limits_2^{17} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{17} f(x)\mathrm{d}x$.

$\int\limits_1^4 (2x+1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \ln(x+1)\,\mathrm{d}\left(x^2+x\right) = \left(x^2+x\right)\ln(x+1)\Big|_1^4 - \int\limits_1^4 \left(x^2+x\right)\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$

$= 20\ln 5 - 2\ln 2 - \dfrac{x^2}{2}\Big|_1^4 = 20\ln 5 - 2\ln 2 - \dfrac{15}{2}$.

Do đó $\int\limits_1^{17} f(x)\mathrm{d}x = 20\ln 5 - 2\ln 2 - \dfrac{15}{2} \Rightarrow a = 20, b = 2, c = -\dfrac{15}{2}$.

Vậy $a + 3b + 2c = 11$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2;4]$. Biết $4x^3 f(x) = \left[f'(x)\right]^3 - x^3\ \forall x \in [2;4]$, $f(2) = \dfrac{7}{4}$. Giá trị của $f\left(\sqrt{13}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{13}-1}{4}$. **B.** $\dfrac{65}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **D.** $\dfrac{63}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow f(x)>0, \forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3 \Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int \dfrac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\int x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\frac{x^2}{2}+C$.

Do $f(2)=\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=2+C \Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}.\sqrt{\left[\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-\frac{1}{4}$

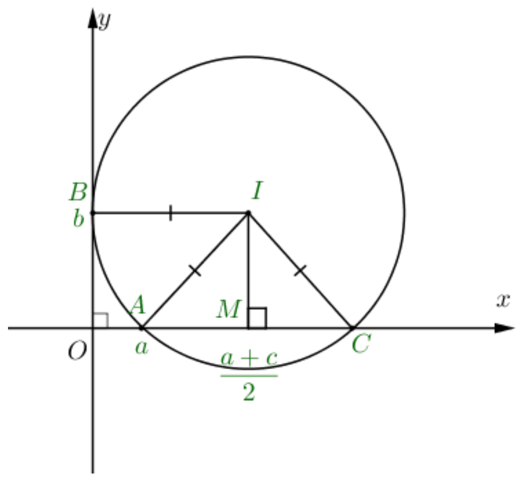
Vậy $f\left(\sqrt{13}\right)=\frac{63}{4}$.

Câu 41: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trên tia Ox lấy 12 điểm phân biệt (khác O) là $A_1, A_2, ..., A_{12}$ và trên tia Oy lấy 12 điểm phân biệt (khác O) là $B_1, B_2, ..., B_{12}$ thỏa mãn $OA_1=A_1A_2=...=A_{11}A_{12}=OB_1=B_1B_2=...=B_{11}B_{12}=1$(đơn vị). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh nằm trong 24 điểm $A_1, A_2, ..., A_{12}, B_1, B_2, ..., B_{12}$. Xác suất để tam giác chọn được có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với một trong hai trục Ox hoặc Oy là:

A. $\frac{5}{1584}$. **B.** $\frac{5}{792}$. **C.** $\frac{2}{225}$. **D.** $\frac{1}{135}$.

Lời giải

Chọn B



*** Trường hợp 1:** Hai đỉnh thuộc tia Ox có hoành độ lần lượt là a và c, với $a<c;\ a,c\in\{1;2;...;12\}$ và một đỉnh thuộc tia Oy có tung độ b, với $b\in\{1;2;...;12\}$.

- Số tam giác có 3 đỉnh được chọn như trên là: $12.C_{12}^2$ (tam giác).

- Xét tam giác ABC có $A(a;0)$, $C(c;0)$, $B(0;b)$ mà đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với trục tung Oy (như hình vẽ).

Gọi M là trung điểm $AC \Rightarrow IM\perp AC$ và $M\left(\frac{a+c}{2};0\right)$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là $I\left(\frac{a+c}{2};b\right)$.

Khi đó: $IA=IB=IC \Rightarrow IA^2=IB^2 \Leftrightarrow b^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow b^2=ac$.

Nhận thấy: $(a;c)\in\{(1;4),(1;9),(2;8),(3;12),(4;9)\}$, b tương ứng là 2; 3; 4; 6; 6.

Có 5 tam giác thoả mãn.

*** Trường hợp 2:**

- Hai đỉnh thuộc tia Oy và một đỉnh thuộc tia Ox: có $12.C_{12}^2$ tam giác.

- Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có 5 tam giác mà đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với trục Ox.

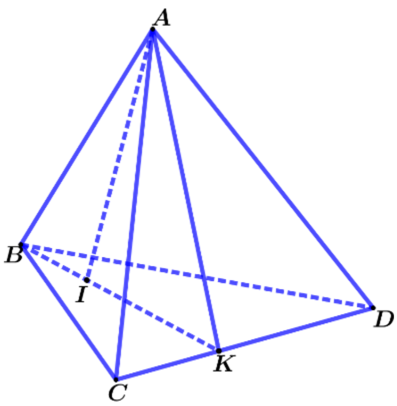
Do đó xác xuất cần tính là: $P=\frac{2.5}{2.12.C_{12}^2}=\frac{5}{792}$.

Câu 42: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $2KD=3KC$ và I là điểm thuộc đoạn thẳng BK sao cho $IK=2IB$. Mặt phẳng (α) đi qua I và luôn cắt các tia AB, AC, AD lần lượt tại các điểm M, N, P (khác A). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=4.\frac{AB^2}{AM^2}+\frac{AC^2}{AN^2}+4.\frac{AD^2}{AP^2}$.

A. $\frac{60}{7}$. **B.** $\frac{7}{60}$. **C.** $\frac{45}{7}$. **D.** $\frac{7}{45}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

+ $2\overrightarrow{KD}=-3\overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ (1).

+ $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}.\frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{5}.\frac{AC}{AN}\overrightarrow{AN}+\frac{2}{15}.\frac{AD}{AP}\overrightarrow{AP}$

Vì 4 điểm I, M, N, P đồng phẳng nên suy ra $\frac{2}{3}.\frac{AB}{AM}+\frac{1}{5}.\frac{AC}{AN}+\frac{2}{15}.\frac{AD}{AP}=1$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có:

$$1=\frac{1}{3}.\frac{2AB}{AM}+\frac{1}{5}.\frac{AC}{AN}+\frac{1}{15}.\frac{2AD}{AP}\le\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{15}\right)^2}.\sqrt{4.\frac{AB^2}{AM^2}+\frac{AC^2}{AN^2}+4.\frac{AD^2}{AP^2}}$$

$\Rightarrow \frac{45}{7}\le 4.\frac{AB^2}{AM^2}+\frac{AC^2}{AN^2}+4.\frac{AD^2}{AP^2}=T$ hay $T\ge\frac{45}{7}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{2AB}{AM}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{AC}{AN}:\dfrac{1}{5}=\dfrac{2AD}{AP}:\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{2}{3}.\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{1}{5}.\dfrac{AC}{AN}+\dfrac{2}{15}.\dfrac{AD}{AP}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AM}=\dfrac{15}{14} \\ \dfrac{AC}{AN}=\dfrac{9}{7} \\ \dfrac{AD}{AP}=\dfrac{3}{14} \end{cases}$$

Vậy $T_{\min}=\dfrac{45}{7}$ khi $AM=\dfrac{14}{15}AB; AN=\dfrac{7}{9}AC; AP=\dfrac{14}{3}AD$.

Câu 43: Cho hàm số $f\left(x\right)=3^{x-4}+\left(x+1\right).2^{7-x}-6x+3$. Giả sử $m_0=\dfrac{a}{b}$ $\left(a,b\in\mathbb{N}^*,\dfrac{a}{b}\right.$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=10$. **B.** $P=9$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}$, $\left(x\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]\right)\Rightarrow t'=\dfrac{36x-12}{\sqrt{6x-9x^2}}\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
t'		$-$	0	$+$	
t	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	7

Ta có $t\in\left[3;7\right]$ và $t=3$ có 1 nghiệm; $t\in\left(3;7\right]$ có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+2m-1=0$ trở thành $f\left(t\right)+2m-1=0$ $\left(t\in\left[3;7\right]\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^{t-4}+\left(t+1\right).2^{7-t}-6t+3$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=3^{t-4}.\ln3+2^{7-t}-\left(t+1\right).2^{7-t}.\ln2-6$

$\Rightarrow f''\left(t\right)=3^{t-4}.\ln^2 3-2^{7-t}.\ln2-.2^{7-t}.\ln2+\left(t+1\right).2^{7-t}.\ln^2 2$

$\qquad =3^{t-4}.\ln^2 3+2^{7-t}.\left(\left(t+1\right).\ln^2 2-\ln4\right)>0\ \forall t\in\left[3;7\right]$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên đoạn $\left[3;7\right]$

Vì $f'\left(3\right).f'\left(7\right)<0\Rightarrow f'\left(t\right)=0$ có nghiệm $t_0\in\left(3;7\right)$

Bảng biến thiên

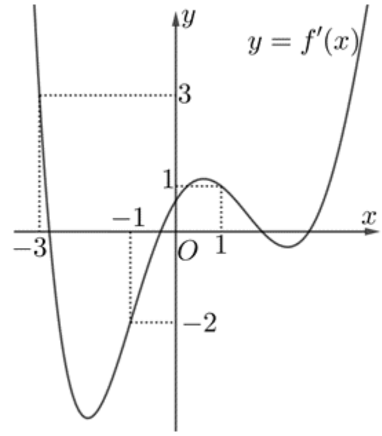
t	3		t_0		7
$f'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(t\right)$	$\frac{148}{3}$	$\searrow$	$f\left(t_0\right)$	$\nearrow$	-4

Ta có: $f\left(t\right)+2m-1=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=1-2m$

Phương trình có nhiều nghiệm nhất khi: $f(t_0)<1-2m\le -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\le m<\frac{1-f(t_0)}{2}\Rightarrow m_0=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow a=5;b=2\Rightarrow T=a+b=7$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới và $f(-1)=0$. Gọi $S=\left(-\infty;\frac{a}{b}\right]$ (với $a,b\in\mathbb{Z},b>0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó giá trị của $a+b$ là:



A. 31. **B.** -7. **C.** 7. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$

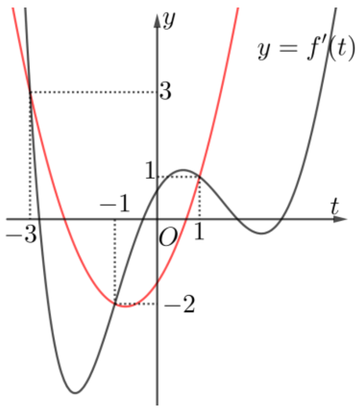
$\Leftrightarrow m<2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5(1-2\sin^2 x)}{4}$.

Đặt $t=\sin x-2$,với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(-3;-1)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$m<2f(t)-\frac{2(t+2)^3}{3}+(t+2)-\frac{5\left[1-2(t+2)^2\right]}{4}\Leftrightarrow m<2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}$ (*).

Xét hàm số $g(t)=2f(t)-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t+\frac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t)=2f'(t)-2t^2-3t+3$. Do đó $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và parabol $y=t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t)=0 \Leftrightarrow t\in\{-3;-1\}$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m\le g(-1)=2f(-1)+\frac{19}{12}=\frac{19}{12}$

$\Rightarrow S=\left(-\infty;\frac{19}{12}\right]\Rightarrow a+b=31$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	-4		-3		-2		1		2		3		4
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của $m\in[-4;2]$ để hàm số $y=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^3+2x\Rightarrow t'=x^2+2>0,\forall x\Rightarrow t(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$

$\forall x\in[-1;1]\Rightarrow t(-1)\le t\le t(1)\Leftrightarrow -3\le t\le 3$

Suy ra $-6\le f(t)\le 5$

Khi đó: $y=\left|f(t)+3f(m)\right|$ có

$\max y=\max\left\{\left|5+3f(m)\right|;\left|-6+3f(m)\right|\right\}$

$=\frac{\left|5+3f(m)-6+3f(m)\right|+\left|5+3f(m)+6-3f(m)\right|}{2}=\frac{\left|6f(m)-1\right|+11}{2}$

Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow \frac{\left|6f(m)-1\right|+11}{2}=8\Leftrightarrow\left|6f(m)-1\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=1\\ f(m)=\frac{-2}{3}\end{array}\right.$

Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt, suy ra có 3 giá trị $m\in\{x_1,x_2,x_3\}$

Đường thẳng $y=\frac{-2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 4 điểm phân biệt, suy ra có 4 giá trị $m\in\{x_4,x_5,x_6,x_7\}$

Vậy có tổng cộng 7 giá trị thực của tham số m.

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-3$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left[m^2+x\left(m-2^{f(x)}\right)+2.2^{f(x)}-3\right]\left(2-2^{\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-2}\right)\ge 0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập hợp S là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=\left[m^2+x\left(m-2^{f(x)}\right)+2.2^{f(x)}-3\right]\left(2-2^{\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-2}\right)$.

Nhận thấy: $g\left(x\right)=2\left[m^2+x\left(m-2^{f(x)}\right)+2.2^{f(x)}-3\right]\left(1-2^{f(x)}\right)$.

Ta có: $1-2^{f(x)}=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$ trong đó $x=-2$ là nghiệm kép.

Nếu $m^2+x\left(m-2^{f(x)}\right)+2.2^{f(x)}-3=0$ không nhận $x=2$ là nghiệm thì $g\left(x\right)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua 2, tức là không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó điều kiện cần là $m^2+2\left(m-2^{f(2)}\right)+2.2^{f(2)}-3=0$ hay $m^2+2\left(m-1\right)+2-3=0\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Vì m nguyên dương nên $m=1$.

Điều kiện đủ:

- Với $m=1$ thì $g\left(x\right)=2\left[1+x\left(1-2^{f(x)}\right)+2.2^{f(x)}-3\right]\left(1-2^{f(x)}\right)=2\left(x-2\right)\left(1-2^{f(x)}\right)^2$ sẽ đổi dấu khi x qua 2 nên loại.

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn.

Câu 47: Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương, $a>1$ thỏa mãn $\log_a^2\left(bc\right)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{9-c^2}=0$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+3b+2c-1$ gần với giá trị nào nhất dưới đây?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $9-c^2\ge 0\Rightarrow 0<c\le 3$.

Do a,b,c là ba số thực dương, $a>1$ nên ta có:

$$\text{P}=\log_a^2\left(bc\right)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{9-c^2}\ge\log_a^2\left(bc\right)+\log_a\left(2\sqrt{b^3c^3.\frac{bc}{4}}\right)^2+4+\sqrt{9-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{P}\ge\log_a^2\left(bc\right)+4\log_a\left(bc\right)+4+\sqrt{9-c^2}\Leftrightarrow P\ge\left(\log_a\left(bc\right)+2\right)^2+\sqrt{9-c^2}\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a\left(bc\right)+2=0\\\sqrt{9-c^2}=0\\b^3c^3=\frac{bc}{4}\\a>1\\b>0\\0<c\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=\frac{1}{a^2}\\c=3\\bc=\frac{1}{2}\\a>1\\b>0\\0<c\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=\frac{1}{6}\\c=3\end{cases}$.

Vậy $T=a+3b+2c-1=\sqrt{2}+\frac{1}{2}+6-1\approx 6,91$.

Câu 48: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $0\le x\le 2023$ và $384.128^{x^2-2x}-6.8^y+6=3y-7x^2+14x$?

A. 2023. **B.** 675. **C.** 1349. **D.** 1347.

Lời giải

Chọn C

Ta có $384.128^{x^2-2x}-6.8^y+6=3y-7x^2+14x \Leftrightarrow 384.2^{7x^2-14x}+7x^2-14x=6.2^{3y}+3y-6$

$\Leftrightarrow 3.2^7.2^{7x^2-14x}+7x^2-14x=3.2.2^{3y}+3y-6 \Leftrightarrow 3.2^{7x^2-14x+7}+7x^2-14x+7=3.2^{3y+1}+3y+1\ (*)$

Xét hàm $f(t)=3.2^t+t$

Ta có $f'(t)=3.2^t.\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(7x^2-14x+7)=f(3y+1)\Leftrightarrow 7x^2-14x+7=3y+1$

$\Leftrightarrow 7(x-1)^2=3y+1\Leftrightarrow 7(x-1)^2-1=3y$

Ta có $y\in\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $7(x-1)^2-1$ chia hết cho 3.

$7(x-1)^2-1=6(x-1)^2+(x-1)^2-1=6(x-1)^2+x(x-2)$,

Suy ra $\left[7(x-1)^2-1\right]\vdots 3\Leftrightarrow x(x-2)\vdots 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3k\\x=3m+2\end{array}\right., k,m\in\mathbb{Z}$.

Theo giả thiết $0\le x\le 2023\Rightarrow \left[\begin{array}{l}0\le 3k\le 2023\\0\le 3m+2\le 2023\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}0\le k\le 674\\0\le m\le 673\end{array}\right.$

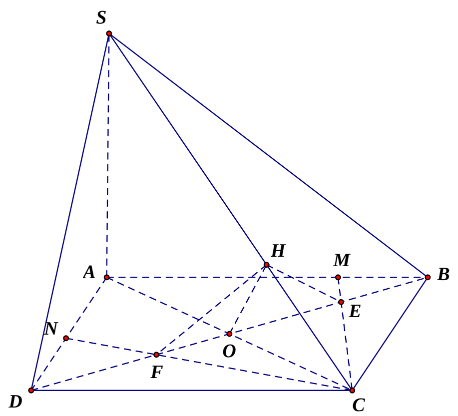
Vậy có $2.674+1=1349$ cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đề bài.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA=2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M,N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB,AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{a}{b}$, a và b nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=4$. **B.** $a+2b=9$. **C.** $a+2b=13$. **D.** $a+2b=22$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E,F lần lượt là giao điểm của BD với CM và CN. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Theo giả thiết, ta có $BD\perp(SAC)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên SC.

$\Rightarrow SC\perp(HEF)$.

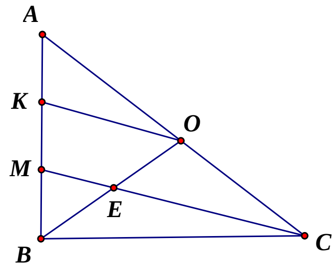
Vì $(SMC)\perp(SNC)$ nên $HE\perp HF$.

$\Rightarrow \Delta HEF$ vuông tại H có chiều cao OH. $\Rightarrow OE.OF=OH^2$.

Trong đó: $OH=OC.\sin SCA=OC.\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\Rightarrow OE.OF=\dfrac{2^2}{6}=\dfrac{2}{3}$ (1).

Đặt $AM=x,\ (x>0)$, $AN=y,\ (y>0)$.

Xét ΔABC, gọi K là trung điểm của AM.



Khi đó: $OK//CM\Rightarrow \dfrac{BE}{OE}=\dfrac{BM}{MK}\Rightarrow \dfrac{OB-OE}{OE}=\dfrac{2-x}{\frac{x}{2}}=\dfrac{2(2-x)}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{OB}{OE}=\dfrac{4-x}{x}\Rightarrow OE=\dfrac{2x\sqrt{2}}{2(4-x)}$.

Chứng minh tương tự, ta có: $OF=\dfrac{2y\sqrt{2}}{2(4-y)}$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{4xy}{2(4-x)(4-y)}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3xy=(4-x)(4-y)\Leftrightarrow (x+2)(y+2)=12$ (2)

Ta lại có: $S_{AMCN}=S_{AMC}+S_{ANC}=\dfrac{1}{2}AC.AM.\sin 45^o+\dfrac{1}{2}AC.AM.\sin 45^o=(x+y)$.

$\Rightarrow V_{S.AMCN}=\dfrac{1}{3}SA.(x+y)=\dfrac{2}{3}(x+y)$.

Từ (2) suy ra $V_{S.AMCN}=\dfrac{2}{3}\left(x-2+\dfrac{12}{x+2}\right)$.

Từ (2) suy ra $y=\dfrac{12}{x+2}-2$.

Vì N thuộc cạnh AD nên $y\le 2\Rightarrow \dfrac{12}{x+2}-2\le 2\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow x,y\in[1;2]$.

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{2}{3}\left(x-2+\dfrac{12}{x+2}\right)$, với $x\in[1;2]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{12}{(x+2)^2}\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-8=0\Leftrightarrow x=2\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Ta lại có: $f(1)=f(2)=2$, $f\left(2(\sqrt{3}-1)\right)=\dfrac{8\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$.

$\Rightarrow$Giá trị lớn nhất của $V_{S.AMCN}=2$ khi $x=1,y=2$ hoặc $x=2,y=1$.

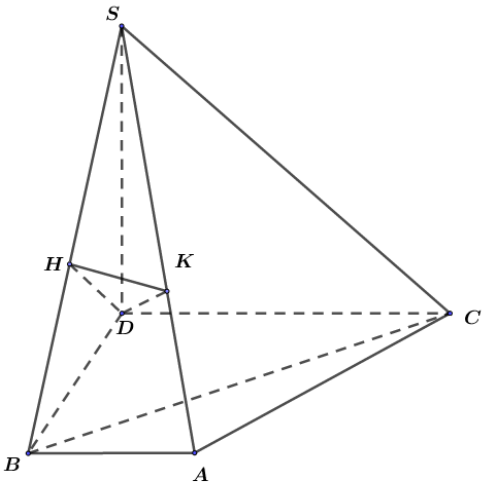
$\Rightarrow T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}=\dfrac{4}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}$. $\Rightarrow a+2b=5+2.4=13$

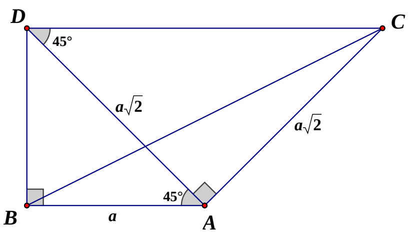
Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a,\ AC = a\sqrt{2}$ và $CAB = 135^\circ$, tam giác SAB vuông tại B và tam giác SAC vuông tại A. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) là α thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A





- Gọi D là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC).

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$.

Lại có: $\begin{cases} AC \perp SA \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAD) \Rightarrow AC \perp AD$.

- Do $CAB = 135^\circ \Rightarrow BAD = 45^\circ$ suy ra tam giác ABD vuông cân tại $B \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$
$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông cân tại $A \Rightarrow$ tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông tại B và D.
- Dựng $DH \perp SB$ $(H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB)$.
- Dựng $DK \perp SA$ $(K \in SA) \Rightarrow DK \perp (SAC)$.
- Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) ta có: $\alpha = (DH, DK) = HDK$ (do tam giác DHK vuông tại H).
- Đặt $SD = x$, $(x > 0)$.

Do ΔDHK vuông tại H nên có $\cos HDK = \dfrac{DH}{DK} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}} . \dfrac{\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2}.ax} = \dfrac{\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+x^2}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{3}\sqrt{2a^2+x^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 4x^2 = 6a^2 + 3x^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}.SD.AB.AC.\sin BAC = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

HẾT