SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH YÊN BÁI	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)*	Môn thi: **TOÁN** Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **02/3/2023**

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $S = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}$.

2. Cho $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết rằng $P(2) = P(3) = 2023$. Tính giá trị của biểu thức $Q = P(5) - P(0)$.

Câu 2. *(3,0 điểm)* Giải phương trình $8\left(\frac{1}{3x-5} + \frac{1}{3x+5}\right) + 1 = \sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}$.

Câu 3. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm H cố định thuộc bán kính OB (H khác O và B). Qua điểm H kẻ dây cung MN vuông góc với đường kính AB. Một điểm C di động trên cung nhỏ AN (C khác A và N). Gọi L là giao điểm của BC và MN.

a) Chứng minh rằng $ACLH$ là một tứ giác nội tiếp và $BH.BA = BL.BC$.

b) Chứng minh rằng BN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CLN.

c) Đường thẳng qua N và vuông góc với AC cắt MC tại D. Tìm vị trí của điểm C trên cung nhỏ AN của đường tròn tâm O sao cho diện tích tam giác ADM đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1) = r^2+1$.

2. Cho m và n là các số nguyên dương thỏa mãn $mn+1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng $m+n$ cũng chia hết cho 24.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{y+z}{x+1} + \frac{z+x}{y+1} + \frac{x+y}{z+1} \geq 3.$$

2. Để chuẩn bị cho Kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, bạn Tùng quyết định luyện tập giải một số bài toán trong vòng 6 tuần. Theo dự định, bạn Tùng sẽ giải ít nhất một bài toán mỗi ngày và không quá 10 bài toán mỗi tuần. Chứng minh rằng luôn tồn tại một chuỗi ngày liên tiếp mà trong khoảng thời gian đó tổng số bài toán Tùng giải bằng 23.

---------- **Hết** ----------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH YÊN BÁI** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS NĂM HỌC 2022 - 2023 MÔN TOÁN *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $S=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}$.

2. Cho $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết rằng $P(2)=P(3)=2023$.

Tính giá trị biểu thức $Q=P(5)-P(0)$.

Câu 2. *(3,0 điểm)* Giải phương trình $8\left(\frac{1}{3x-5}+\frac{1}{3x+5}\right)+1=\sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}$.

Câu 3. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm H cố định thuộc bán kính OB (H khác O và B). Qua điểm H kẻ dây cung MN vuông góc với đường kính AB. Một điểm C đi động trên cung nhỏ AN (C khác A và N). Gọi L là giao điểm của BC và MN.

a) Chứng minh rằng $ACLH$ là một tứ giác nội tiếp và $BH.BA=BL.BC$.

b) Chứng minh rằng BN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CLN.

c) Đường thẳng qua N và vuông góc với AC cắt MC tại D. Tìm vị trí của điểm C trên cung nhỏ AN của đường tròn tâm O sao cho diện tích tam giác ADM đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p,q,r) thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1$.

2. Cho m và n là các số nguyên dương thỏa mãn $mn+1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng $m+n$ cũng chia hết cho 24.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

1. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{y+z}{x+1}+\frac{z+x}{y+1}+\frac{x+y}{z+1}\geq 3.$$

2. Để chuẩn bị cho Kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, bạn Tùng quyết định luyện tập giải một số bài toán trong vòng 6 tuần. Theo dự định, bạn Tùng sẽ giải ít nhất một bài toán mỗi ngày và không quá 10 bài toán mỗi tuần. Chứng minh rằng luôn tồn tại một chuỗi ngày liên tiếp mà trong khoảng thời gian đó tổng số bài toán Tùng giải bằng 23.

Hết

LỜI GIẢI

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $S=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}$.

2. Cho $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết rằng $P(2)=P(3)=2023$.

Tính giá trị biểu thức $Q=P(5)-P(0)$.

Lời giải

1. Ta có:

$$S=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}}+\sqrt{\frac{\left(6-3\sqrt{3}\right)^2}{2\left(6-3\sqrt{3}\right)}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}+\frac{6-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}+\frac{6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}=1$$

2. Ta có:

$$P(2)=P(3)=2023\Leftrightarrow 8+4a+2b+c=27+9a+3b+c=2023\Rightarrow 5a+b=-19$$

Do đó:

$$Q=P(5)-P(0)=(125+25a+5b+c)-c=125+5(5a+b)=125+5(-19)=30.$$

Câu 2. *(3,0 điểm)* Giải phương trình $8\left(\frac{1}{3x-5}+\frac{1}{3x+5}\right)+1=\sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}$.

Lời giải

+ Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\frac{-5}{3}<x<0\\ x>\frac{5}{3}\end{array}\right.$

+ Ta có: $8\left(\frac{1}{3x-5}+\frac{1}{3x+5}\right)+1=\sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}\Leftrightarrow 8.\frac{6x}{9x^2-25}+1=\sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}\;(*)$

+ Đặt $t=\sqrt{\frac{9x^2-25}{x}}>0\Leftrightarrow t^2=\frac{9x^2-25}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{t^2}=\frac{x}{9x^2-25}$

+ Khi đó, phương trình

$(*)\Leftrightarrow 8.\frac{6}{t^2}+1=t\Leftrightarrow t^3-t^2-48=0\Leftrightarrow t^3-4t^2+3t^2-48=0\Leftrightarrow(t-4)\left(t^2-3t+12\right)=0\Leftrightarrow t=4$

+ Với $t=4\Leftrightarrow 4^2=\frac{9x^2-25}{x}\Leftrightarrow 9x^2-16x-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,(th.m)\\ x=\frac{25}{19},(loai)\end{array}\right.$

+ Vậy: Phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{-1\}$.

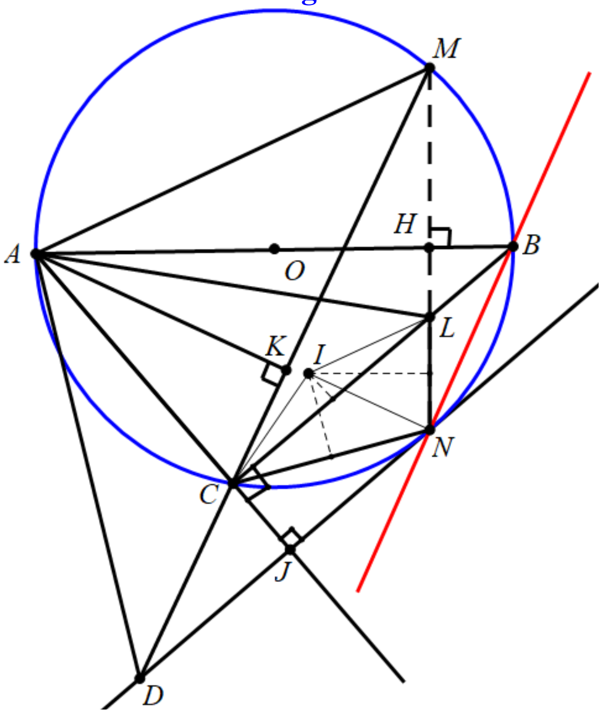
Câu 3. **(6,0 điểm)**

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm H cố định thuộc bán kính OB (H khác O và B). Qua điểm H kẻ dây cung MN vuông góc với đường kính AB. Một điểm C đi động trên cung nhỏ AN (C khác A và N). Gọi L là giao điểm của BC và MN.

a) Chứng minh rằng $ACLH$ là một tứ giác nội tiếp và $BH.BA=BL.BC$.

b) Chứng minh rằng BN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CLN.
c) Đường thẳng qua N và vuông góc với AC cắt MC tại D. Tìm vị trí của điểm C trên cung nhỏ AN của đường tròn tâm O sao cho diện tích tam giác ADM đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Tứ giác $ACLH$ có: $\widehat{AHL} = 90°$ và $\widehat{ACL} = \widehat{ACB} = 90°$. Suy ra $ACLH$ nội tiếp.

Ta có: $\Delta HLB \backsim \Delta CAB, (g.g) \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BL}{BA} \Rightarrow BH.BA = BL.BC$

b) Ta có:

$\widehat{BNL} = \widehat{BNM}$.

$\widehat{NCL} = \widehat{NCB}$.

Do $AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{MN}$. Do đó $\widehat{BNM} = \widehat{BCN}$.

Suy ra $\widehat{BNL} = \widehat{NCL}$. Suy ra BL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CNL.

c) Do $ND \perp AC$ và $BC \perp AC$ nên $ND // BC$.

Gọi J là giao điểm của AC và DN.

Ta có: $\widehat{JCN} + \widehat{NCB} = 90°$, $\widehat{DCJ} + \widehat{JCN} + \widehat{NCB} + \widehat{BCM} = 180°$ mà $\widehat{BCM} = \widehat{BCN} \Rightarrow \widehat{DCJ} = \widehat{NCJ}$.

Suy ra CJ là đường trung trực của ND hay AC là trung trực của ND.

Ta có: $AD = AN = AM$.

Kẻ $AK \perp DM \Rightarrow \Delta AKM \backsim \Delta ACB, (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AKM}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = const \Rightarrow S_{\Delta AKM} = a.S_{\Delta ACB}, (a = const)$$

Ta có : $S_{\Delta ADM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta AKM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta ACB}$ lớn nhất

Mà: $S_{\Delta ACB}=\frac{1}{2}d(C,AB).AB$ lớn nhất $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB, (vì $d(C,AB)\le R$)

Câu 4. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p,q,r) thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1(*)$.

Lời giải

1. Vì (p,q,r) là một bộ ba số nguyên tố thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1\Rightarrow r>3\Rightarrow r$ lẻ

$\Rightarrow r^2+1$ chẵn

$\Rightarrow p^2+1;q^2+1$ không cùng lẻ

Giả sử rằng $p=2\Rightarrow p^2+1=5$ lẻ$\Rightarrow q^2+1$ chẵn. Từ $(*)\Rightarrow 5q^2+4=r^2$

+ Nếu q là số nguyên tố không chia hết cho 3 thì

$q^2\equiv 1 \pmod 3\Rightarrow 5q^2\equiv 2 \pmod 3\Rightarrow 5q^2+\equiv 0 \pmod 3\Leftrightarrow r^2\equiv 0 \pmod 3\Leftrightarrow r\equiv 0 \pmod 3$, mà r là số nguyên tố lớn hơn 3, (không thỏa mãn)

$\Rightarrow q=3$.

+ Khi đó: $r^2=49\Rightarrow r=7$

Vậy: các bộ ba số nguyên tố (p,q,r) thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1(*)$ là : $(2;3;7);(3;2;7)$

2. Cho m và n là các số nguyên dương thỏa mãn $mn+1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng $m+n$ cũng chia hết cho 24.

Lời giải

+ Đặt : $A=mn+1+m+n=(m+1)(n+1);B=mn+1-m-n=(m-1)(n-1)$

+ Xét $A.B=(m^2-1)(n^2-1)$

+ Vì $mn+1\vdots 24$ $\Rightarrow$ $m\not\vdots\, 24$ và $n\not\vdots\, 24$ $\Rightarrow$ $m\not\vdots\, 3$ và $n\not\vdots\, 3$ $\Rightarrow$ $m^2-1\vdots 3$ và $n^2-1\vdots 3$ $\Rightarrow$ $A.B\vdots 3^2$, (1)

+ Mặt khác, vì $mn+1\vdots 24$ $\Rightarrow$ $m.n$ lẻ $\Rightarrow$ m và n cùng lẻ $\Rightarrow$ $m^2-1\vdots 8$ và $n^2-1\vdots 8$ $\Rightarrow$ $A.B\vdots 8^2$, (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra: $A.B\vdots 24^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\vdots 24\\ B\vdots 24\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(mn+1)+m+n\vdots 24\Rightarrow m+n\vdots 24\\ (mn+1)-(m+n)\vdots 24\Rightarrow m+n\vdots 24\end{array}\right.,(\text{vì}\,(mn+1)\vdots 24)$

Câu 5. **(3,0 điểm)**

1. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{y+z}{x+1}+\frac{z+x}{y+1}+\frac{x+y}{z+1}\ge 3.$$

Lời giải

1. Đặt $A=\frac{y+z}{x+1}+\frac{z+x}{y+1}+\frac{x+y}{z+1}$

+ Vì: $x+y+z=3\Rightarrow x+y=3-z;y+z=3-x;x+z=3-y$

+ Khi đó:

$$A=\frac{3-x}{x+1}+\frac{3-y}{y+1}+\frac{3-z}{z+1}\Rightarrow A+3=\left(\frac{3-x}{x+1}+1\right)+\left(\frac{3-y}{y+1}+1\right)+\left(\frac{3-z}{z+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow A+3=\frac{4}{x+1}+\frac{4}{y+1}+\frac{4}{z+1}$$

+ Vì $x+y+z=3\Rightarrow x+y+z+1+1+1=6$.

+ Ta có: $A+3+6=\frac{4}{x+1}+x+1+\frac{4}{y+1}+y+1+\frac{4}{z+1}+z+1$

+ Áp dụng, bất đẳng thức Cô- Si, ta có: $\frac{4}{x+1}+x+1\ge\sqrt{\left(\frac{4}{x+1}\right).(x+1)}=4$

Tương tự: $\frac{4}{y+1}+y+1\geq\sqrt{\left(\frac{4}{y+1}\right).(y+1)}=4$

và $\frac{4}{z+1}+z+1\geq\sqrt{\left(\frac{4}{z+1}\right).(z+1)}=4$

+ Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, suy ra: $A+9\geq 4+4+4 \Leftrightarrow A\geq 3$

+ Dấu "$=$" xảy ra

$$A+9\geq 4+4+4 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{x+1}=x+1\\ \frac{4}{y+1}=y+1\\ \frac{4}{z+1}=z+1\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

2. Để chuẩn bị cho Kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, bạn Tùng quyết định luyện tập giải một số bài toán trong vòng 6 tuần. Theo dự định, bạn Tùng sẽ giải ít nhất một bài toán mỗi ngày và không quá 10 bài toán mỗi tuần. Chứng minh rằng luôn tồn tại một chuỗi ngày liên tiếp mà trong khoảng thời gian đó tổng số bài toán Tùng giải bằng 23.

Lời giải

+ Gọi x_i lần lượt là số bài toán mà Tùng giải trong ngày thứ i, ($1\leq i\leq 42, i\in\mathbb{Z}$).

Do Tùng sẽ giải ít nhất một bài toán mỗi ngày và không quá 10 bài toán trong mỗi tuần nên: $1\leq x_i\leq 4$

+ Đặt : $S_i=x_1+x_2+...+x_i, \left(i=\overline{1,42}\right)$, ta có: $S_i\neq S_j, \left(\forall i\neq j; j=\overline{1,42}\right)$

+ Xét tập hợp $A=\{S_1;S_2;...;S_{42}\}$ với $1\leq S_i\leq 60$ và $B=\{S_1+23;S_2+23;...;S_{42}+23\}$ với $24\leq S_j+23\leq 83$.

Hai tập hợp A và B có tất cả 84 phần tử, nhận các giá trị trong tập hợp $\{1;2;3;...;83\}$, (vì $S_{42}=x_1+x_2+...+x_{42}\leq 6.10=60$ nên $S_{42}+23\leq 60+23=83$) nên theo nguyên lý *Đi- rích -lê*, tồn tại hai phần tử bằng nhau.

Mặt khác, hai phần tử bằng nhau này không cùng thuộc A, không cùng thuộc B vì $S_i\neq S_j$ nên một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc B, chẳng hạn $S_i\in A$ và $S_j+23\in B$.

Khi đó: $S_i=S_j+23, (i>j)$ nên $S_i-S_j=23$

Vậy, từ ngày thứ j đến ngày thứ i là chuỗi ngày liên tiếp mà trong khoảng thời gian đó tổng số bài toán Tùng giải bằng 23.

---Hết---