SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT QUẢNG XƯƠNG 2

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG LẦN 1
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).\left[f(x)\right]^{2022}=x.e^{x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{2022}(x-2)^4+\log_{2023}(9-x^2)$.

A. $D=(-3;2)$. **B.** $D=(2;3)$. **C.** $D=(-3;3)\setminus\{2\}$. **D.** $D=[-3;3]$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 2019.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^9(x-1)^8(x-2)^{2022}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V=\dfrac{3a^3}{16}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=2023.2024.x(x-1)^{2022},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{2025}$. **B.** $\dfrac{1}{1012}$. **C.** $-\dfrac{2}{2025}$. **D.** $-\dfrac{1}{1012}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 8: Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P).

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 9: Cho khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ có cạnh bằng a. Gọi V là diện tích của khối đa diện đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-\sin 2x+5$

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $6-\sqrt{2}$. **D.** $6+\sqrt{2}$.

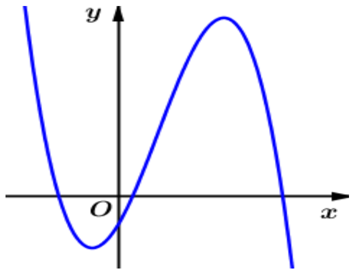
Câu 11: Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

A. 6. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 12.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Câu 13: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 14: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác vuông.

C. Tam giác đều. **D.** Tam giác cân.

Câu 15: Hình nào **không phải** là hình đa diện đều trong các hình dưới đây?

A. Hình chóp tam giác đều.

B. Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau.

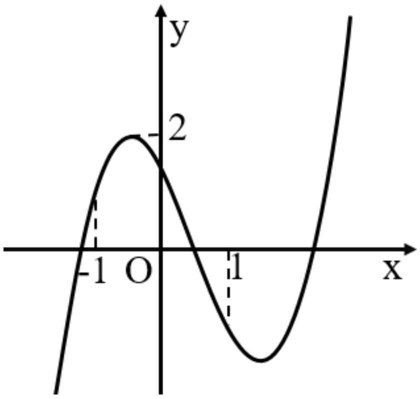
C. Hình lập phương.

D. Hình tứ diện đều.

Câu 16: Bán kính đáy r của hình trụ tròn xoay có diện tích xung quanh S và chiều cao h là

A. $\dfrac{S}{\pi h}$. **B.** $\dfrac{S}{2\pi h}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{S}{2\pi h}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{S}{\pi h}}$

Câu 17: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

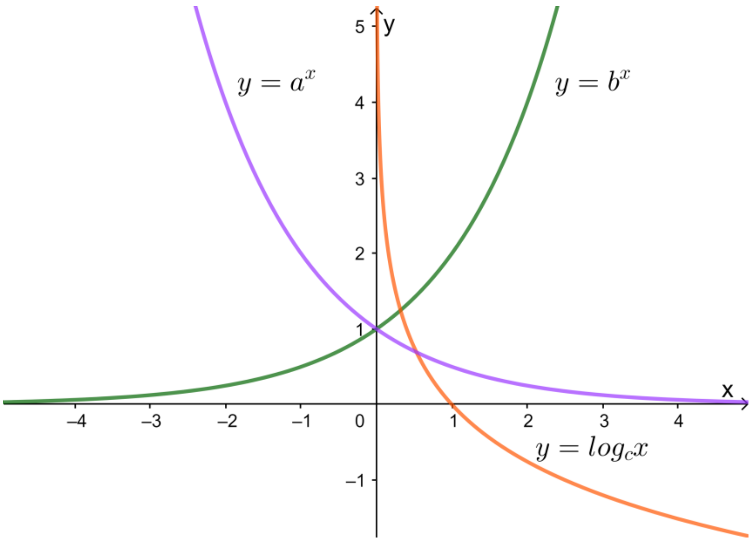
A. $a<0,b<0,c<0,d<0$. **B.** $a>0,b>0,c>0,d<0$.

C. $a>0,b>0,c<0,d>0$. **D.** $a>0,b<0,c<0,d>0$.

Câu 18: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0 2^n+C_n^1 2^{n-1}.3+...+C_n^{n-1}2.3^{n-1}+C_n^n 3^n=5^{15}$. Hệ số của x^3 trong khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)^n$ là

A. $C_{15}^9 2^9.(-3)^6$. **B.** $-C_{15}^9 2^9.3^6$. **C.** $C_{15}^9 2^6.(-3)^9$. **D.** $2^6.3^9$.

Câu 19: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $c < b < a$. **B.** $c < a < b$. **C.** $a < b < c$. **D.** $b < a < c$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(3) = 11$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x = 15$. Khi đó $f(-1)$ bằng

A. 5. **B.** 26. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 21: Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)+1}{x+1} = 3$. Tính $P = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{f(x)+2}-1}{\sqrt{x+5}-2}$.

A. 6. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 22: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\ln a = x; \ln b = y$. Tính $\ln\left(a^3b^2\right)$.

A. $P = x^2y^3$. **B.** $P = 6xy$. **C.** $P = 3x + 2y$. **D.** $P = x^2 + y^2$.

Câu 23: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - \cos 2x$ là

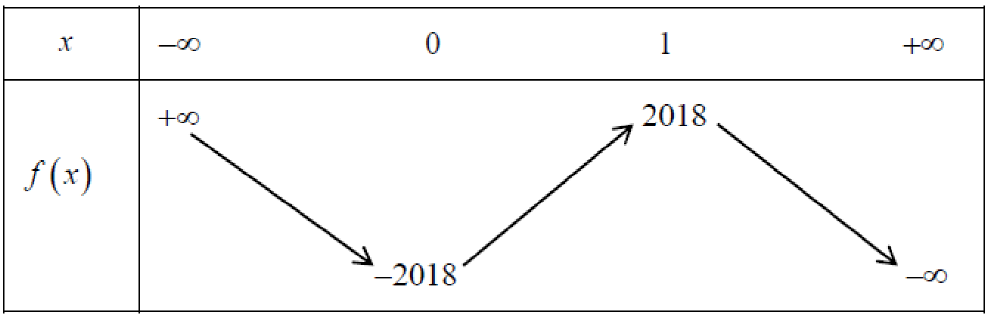
A. $x^2 + \dfrac{1}{2}\sin 2x$. **B.** $x^2 + \sin 2x$. **C.** $x^2 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$. **D.** $x^2 - \sin 2x$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}}$ Tính $S = f(1) + f(2) + ... + f(2022)$.

A. $S = \dfrac{2022 - \sqrt{2022}}{2022}$. **B.** $S = \dfrac{2022 - \sqrt{2022}}{2023}$.

C. $S = \dfrac{2023 - \sqrt{2023}}{2023}$. **D.** $S = 2022$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



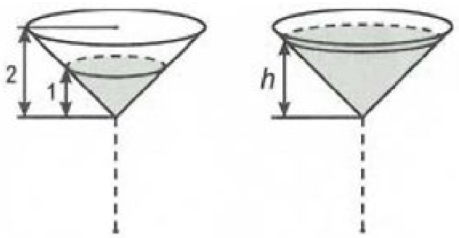
Hỏi phương trình $\left|f(x+2017) - 2018\right| = 2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V, gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{D'M}=2\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NC}$, đường thẳng AM cắt đường $A'D'$ tại P, đường thẳng BN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q. Gọi V' là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A', B', P, Q, M, N. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 27: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao là $2\ (dm)$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thư hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1(dm)$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (Độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01(dm)$).



A. $h\approx 1,73(dm)$. **B.** $h\approx 1,89(dm)$. **C.** $h\approx 1,91(dm)$. **D.** $h\approx 1,41(dm)$

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2022;2022)$ để phương trình $16^x-(m-1)4^{x+1}+3m^2-8m+4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1.x_2>2$

A. 2014 **B.** 2015 **C.** 2021 **D.** 2022

Câu 29: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết thể tích của khối lăng trụ là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^x+m & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=ae+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ cắt đường thẳng $y=2-x$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho O,B,C là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 2, biết B và C không nằm trên trục Oy

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 32: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2\sqrt{3}$; $AD=\sqrt{6}$; $A'C=3\sqrt{2}$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$; $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Thể tích V của khối chóp $A.A'B'C'D'$ là

A. $V=32\sqrt{5}$. **B.** $V=4\sqrt{5}$. **C.** $V=16\sqrt{2}$. **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

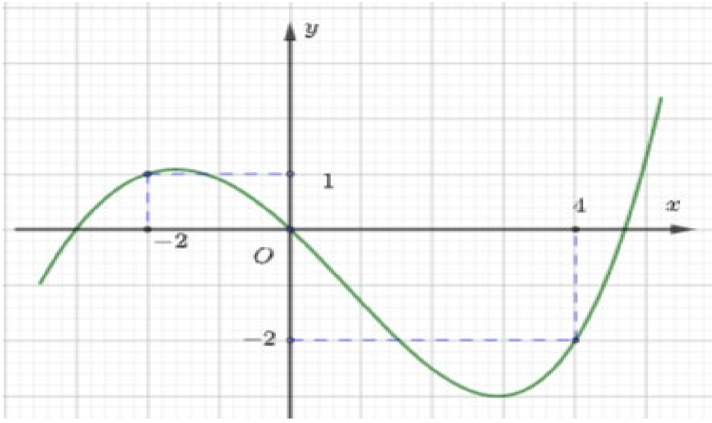
Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 34: Cho các số thực x,y thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

A. $\dfrac{19}{2}$. **B.** $\dfrac{21}{2}$. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 35: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ sao cho $f\left(0\right)=2$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị trong hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=4f\left(x-2\right)+x^2-4x$ trên đoạn $\left[0;6\right]$ bằng

A. 3. **B.** $g\left(2\right)$. **C.** $g\left(0\right)$. **D.** $g\left(6\right)$.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^3-2\left(m+2\right)x^2+\left(-m^2+9m+4\right)x+2m^2-10m$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-5;5\right]$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

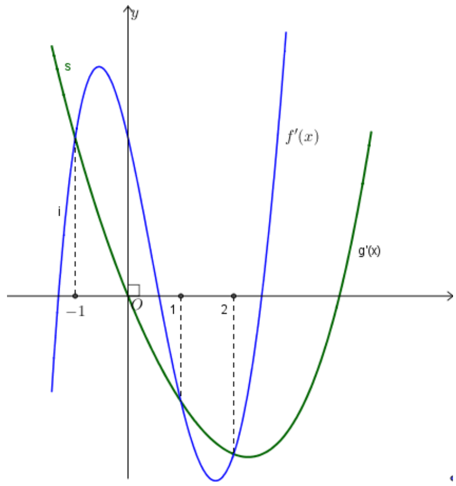
Câu 37: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 38: Hai quả bóng giống nhau có cùng bán kính là R và hai quả bóng giống nhau có bán kính nhỏ hơn r được đặt sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với các quả bóng khác (4 quả bóng đều nằm trên một mặt phẳng). Tỉ số $\dfrac{r}{R}$ là?

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 39: Cho các hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$; $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(m,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=g\left(0\right)$. Các hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên



Gọi S là tất cả các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **B.** $S\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S\in(0;1)$. **D.** $S=2$.

Câu 40: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của tham số thực m để tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2+(y-1)^2=4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất là

A. $m=-\frac{13}{16}$. **B.** $m=\frac{13}{16}$. **C.** $m=-\frac{16}{13}$. **D.** $m=\frac{16}{13}$.

Câu 41: Gọi X là tập chứa tất cả các số tự nhiên có 13 chữ số và chỉ gồm các chữ số "0" và "1" chọn ngẫu nhiên từ X một số tự nhiên. Xác suất để chọn được số tự nhiên chia hết cho 30 là

A. $\frac{85}{512}$. **B.** $\frac{683}{4096}$. **C.** $\frac{341}{2048}$. **D.** $\frac{341}{4096}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD=2AB=2BC=2CD=2a$, $SA=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **B.** $\frac{3\sqrt{310}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{310}}{20}$. **D.** $\frac{\sqrt{310}}{40}$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để đồ thị của hàm số $y=\frac{x+5}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 4044. **D.** 2024.

Câu 44: Cho phương trình $10^{3m}+10^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.

A. $\left(0;\frac{1}{2}\log 2\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2}\log 2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{10}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\log 2\right]$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(x)+2f(1-x)=3x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x).dx=\frac{a}{b}$, (với a,b là các số nguyên dương, và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a-b$.

A. $T=-7$. **B.** $T=16$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Câu 46: Phương trình $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$ có tích các nghiệm trên $(-\pi;0)$ là

A. $-\frac{\pi^2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2}{8}$. **C.** $\frac{5\pi^2}{72}$. **D.** $-\frac{\pi^2}{32}$.

Câu 47: Bạn Mai là sinh viên năm cuối chuẩn bị ra trường, nhờ có công việc làm thêm mà Mai có một khoản tiết kiệm nhỏ, Mai muốn gửi tiết kiệm để chuẩn bị mua một chiếc xe máy Honda Lead trị giá 45 triệu đồng để tiện cho công việc. Vì vậy, Mai đã quyết định gửi tiết kiệm theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,8\%/1$ tháng và mỗi tháng Mai đều đặn gửi tiết kiệm một khoản tiền là 3 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, Mai đủ tiền để mua xe máy?

A. 14 tháng. **B.** 16 tháng. **C.** 17 tháng. **D.** 15 tháng.

Câu 48: Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 \le x, y \le 2022$ và

$$\left(x^2y+2x^2+y+2\right)\log_5\left(\frac{7y}{y+18}\right) \le \left(3x+3y-xy-9\right)\log_3\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)$$

A. 6057. **B.** 3. **C.** 4038. **D.** 2020.

Câu 49: Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=3a, AC=\frac{9\sqrt{30}a}{10}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn thẳng BC. Biết rằng $HC=2HB$ và $SH=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 30^0.

------------- *Hết* -------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	C	C	A	C	A	A	C	C	D	D	A	D	A	B	D	A	B	C	A	C	C	C	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	A	A	C	B	D	B	A	C	C	D	B	B	B	B	C	A	D	A	B	D	A	D	D

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).\left[f(x)\right]^{2022} = x.\mathrm{e}^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hỏi phương trình $f(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f'(x).\left[f(x)\right]^{2022} \mathrm{d}x = \int x.\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \left[f(x)\right]^{2022} \mathrm{d}f(x) = (x-1).\mathrm{e}^x + C$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2023}.\left[f(x)\right]^{2023} = (x-1).\mathrm{e}^x + C \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2023} = 2023(x-1).\mathrm{e}^x + 2023C$.

Do $f(1) = 1$ nên $2023C = 1$ hay $\left[f(x)\right]^{2023} = 2023(x-1).\mathrm{e}^x + 1$.

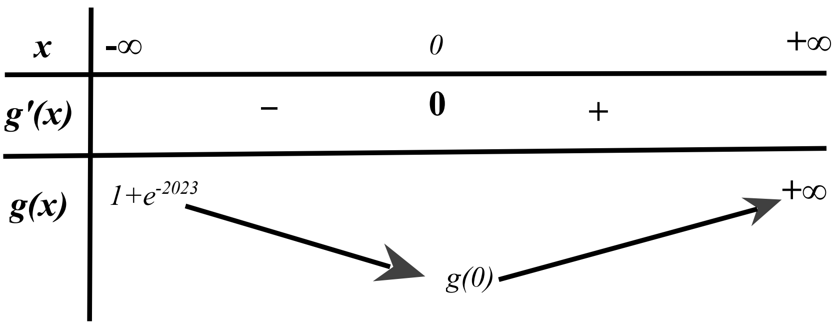
Ta có: $f(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2023} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2023}} \Leftrightarrow 2023(x-1).\mathrm{e}^x + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2023}} = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 2023(x-1).\mathrm{e}^x + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2023}}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 2023x.\mathrm{e}^x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $g(0) = -2023 + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2023}} < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2023}} > 0$.

Bảng biến thiên của hàm số:



Do đó phương trình $f(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{2022}(x-2)^4 + \log_{2023}(9-x^2)$.

A. $D = (-3;2)$. **B.** $D = (2;3)$. **C.** $D = (-3;3)\setminus\{2\}$. **D.** $D = [-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \log_{2022}(x-2)^4 + \log_{2023}(9-x^2)$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^4 > 0 \\ 9 - x^2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -3 < x < 3\end{cases}$

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \ln x$, với $x \in (1; e^6)$ thì $0 < t < 6$.

Khi đó hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$ thì hàm số $y(t) = \dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.

Ta có $y'(t) = \dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$ thì

$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m \notin (0;6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \xrightarrow[m \in [-2022;2022]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2022; -2021; \ldots -1; 0\}.$$

Vậy có tất cả: 2023 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^9(x-1)^8(x-2)^{2022}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

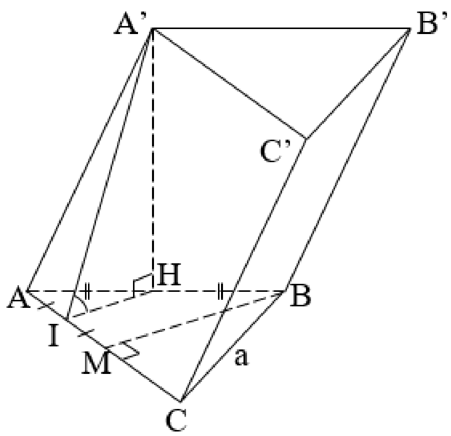
Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2$. $f'(x) = 0$ Chỉ có nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội lẻ nên hàm số có một cực trị.

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V = \dfrac{3a^3}{16}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, AM.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có IH là đường trung bình của tam giác AMB, MB là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Do đó: $\begin{cases} IH // MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$

$\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp IH, IH \subset (ABC) \\ AC \perp A'I, A'I \subset (ACC'A') \\ (ABC) \cap (ACC'A') = AC \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{A'IH}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) $\Rightarrow \widehat{A'IH} = 45^0$

Trong tam giác $A'HI$ vuông tại H, ta có: $A'H = IH = \frac{1}{2}MB = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 0$ và $f'(x) = 2023.2024.x(x-1)^{2022}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{2025}$. **B.** $\frac{1}{1012}$. **C.** $-\frac{2}{2025}$. **D.** $-\frac{1}{1012}$.

Lời giải

Chọn C

Cần nhớ: $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ và $\int (ax+b)^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int 2023.2024.x(x-1)^{2022}\mathrm{d}x = 2023.2024\int x(x-1)^{2022}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ và $x = t + 1$.

Suy ra $f(x) = 2023.2024\int (t+1)t^{2022}\mathrm{d}t = 2023.2024\int \left(t^{2023} + t^{2022}\right)\mathrm{d}t$

$= 2023.2024\left(\frac{t^{2024}}{2024} + \frac{t^{2023}}{2023}\right) + C = 2023t^{2024} + 2024t^{2023} + C$.

Từ đó $f(x) = 2023(x-1)^{2024} + 2024(x-1)^{2023} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Leftrightarrow 2023(1-1)^{2024} + 2024(1-1)^{2023} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x) = 2023(x-1)^{2024} + 2024(x-1)^{2023}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[2023(x-1)^{2024} + 2024(x-1)^{2023}\right]\mathrm{d}x = \left[2023.\frac{(x-1)^{2025}}{2025} + 2024.\frac{(x-1)^{2024}}{2024}\right]\Bigg|_0^1$

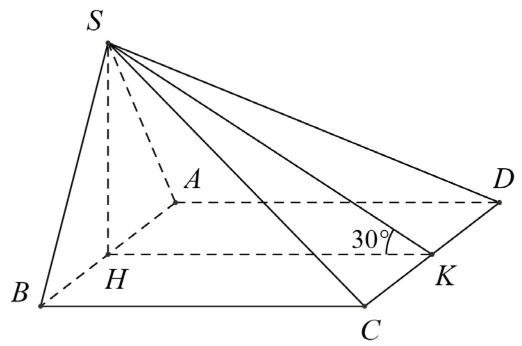
$= -\left(-\frac{2023}{2025} + 1\right) = -\frac{2}{2025}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SKH} = 30°$.

Xét ΔSHK vuông tại H, có $HK = \dfrac{SH}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a}{2}$.

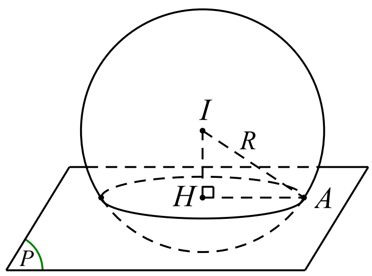
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 8. Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P).

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Bán kính hình cầu đã cho là $R = a\sqrt{3}$.

Khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) là $d = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a$.

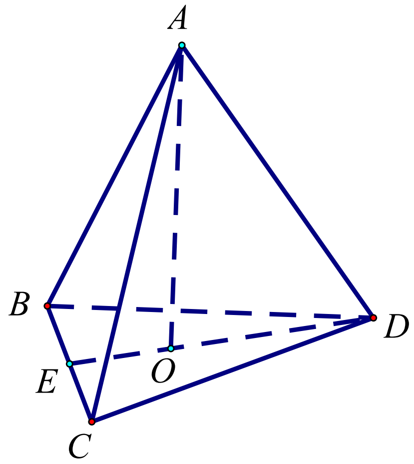
Câu 9. Cho khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ có cạnh bằng a. Gọi V là diện tích của khối đa diện đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $ABCD$ là hình đa diện đều loại $\{3;3\}$ $\Rightarrow ABCD$ là tứ diện đều cạnh a.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD suy ra O là trọng tâm tam giác BCD và $AO\perp(BCD)$.

$\Rightarrow OD=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, AO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $S_{BCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-\sin 2x+5$

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $6-\sqrt{2}$. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=2\cos^2 x-\sin 2x+5=\cos 2x-\sin 2x+6=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+6$.

Do $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$ nên $-\sqrt{2}+6\le\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+6\le\sqrt{2}+6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-\sin 2x+5$ là $6-\sqrt{2}$.

Câu 11. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

A. 6. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp 2 bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế là: $2!$ cách

Số cách xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí là: $3!$ cách

Số cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho hai bạn A và E ngồi ở hai

đầu ghế là: $2!.3!=12$ cách

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

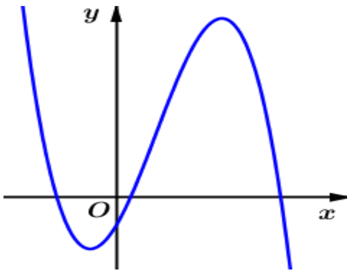
Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $u_2=3$ và $u_4=7$ suy ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u_1+d=3\\u_1+3d=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=2\end{cases}$.

Vậy $u_{15}=u_1+14d=29$.

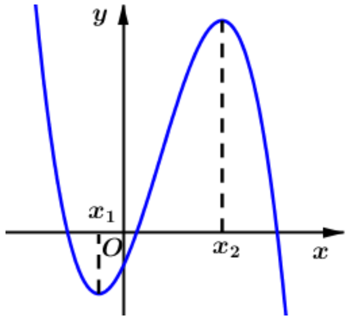
Câu 13. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ giao với trục Oy tại điểm $D(0;d)$ nằm phía dưới trục Ox nên $d < 0$, và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp $a < 0$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 < 0$, đạt cực đại tại $x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Khi đó $\begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases}$ mà $a < 0$ nên $\begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

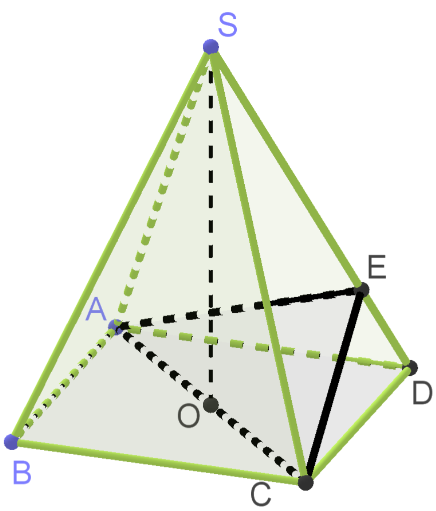
Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị a, b, c, d là $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$.

Câu 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. Tam giác cân.
B. Tam giác vuông.
C. Tam giác đều.
D. Tam giác cân.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp SD$

Gọi E là hình chiếu của A lên SD

$\begin{cases} SD \perp AC \\ SD \perp AE \end{cases} \Rightarrow SD \perp CE$

Thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) chính là (ACE)

* Ta có: $\Delta SAD = \Delta SCD \Rightarrow AE = CE$

$\Rightarrow \Delta AEC$ cân tại E

Hay thiết diện là tam giác cân tại E

Câu 15. Hình nào **không phải** là hình đa diện đều trong các hình dưới đây?

A. Hình chóp tam giác đều.

B. Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau.

C. Hình lập phương.

D. Hình tứ diện đều.

Lời giải

Chọn A

Vì các mặt bên của hình chóp tam giác đều có thể là các tam giác cân không phải là tam giác đều.

Câu 16. Bán kính đáy r của hình trụ tròn xoay có diện tích xung quanh S và chiều cao h là

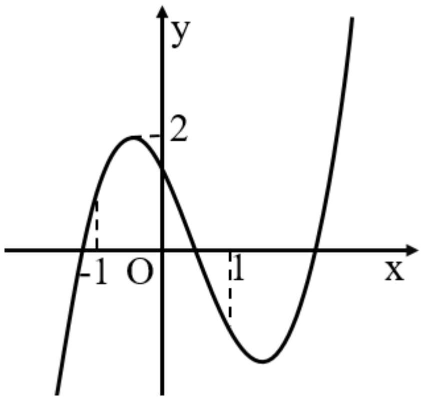
A. $\dfrac{S}{\pi h}$. **B.** $\dfrac{S}{2\pi h}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{S}{2\pi h}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{S}{\pi h}}$

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh hình trụ là $S = 2\pi rh \Leftrightarrow r = \dfrac{S}{2\pi h}$.

Câu 17. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Câu 18. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0 2^n+C_n^1 2^{n-1}.3+...+C_n^{n-1}2.3^{n-1}+C_n^n 3^n=5^{15}$. Hệ số của x^3 trong khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)^n$ là

A. $C_{15}^9 2^9.(-3)^6$. **B.** $-C_{15}^9 2^9.3^6$. **C.** $C_{15}^9 2^6.(-3)^9$. **D.** $2^6.3^9$.

Lời giải

Chọn A

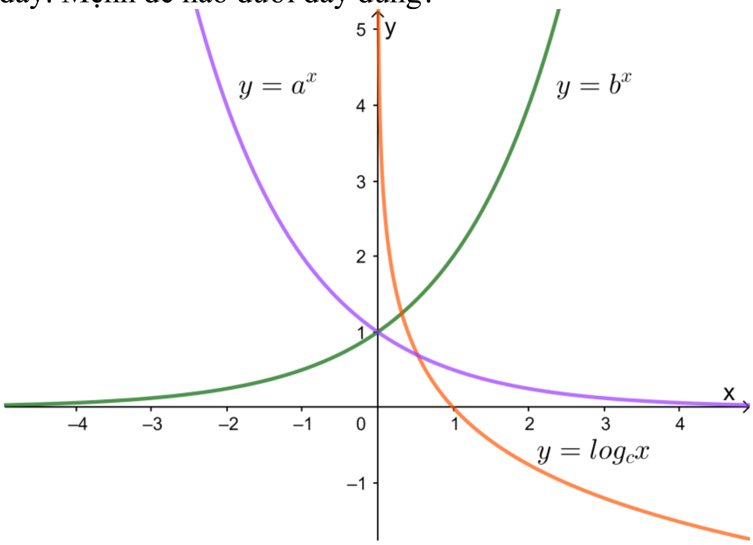
Ta có $C_n^0 2^n+C_n^1 2^{n-1}.3+...+C_n^{n-1}2.3^{n-1}+C_n^n 3^n=5^{15}\Leftrightarrow(2+3)^n=5^{15}\Leftrightarrow 5^n=5^{15}\Leftrightarrow n=15$.

Với $n=15$ ta có khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k 2^{15-k}.(-3)^k x^{15-2k}$.

Vì số hạng chứa x^3 nên $15-2k=3\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{15}^6 2^9.(-3)^6=C_{15}^9 2^9.(-3)^6$.

Câu 19. Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $c<b<a$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b<c$. **D.** $b<a<c$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số mũ ta có $0<a<1$ và $b>1$.

Dựa vào đồ thị hàm số logarit ta có $0<c<1$.

Ta có $b>a$ và $b>c$.

Loại các phương án A,C,D.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(3)=11$ và $\int\limits_{-1}^{3}f'(x)\mathrm{d}x=15$. Khi đó $f(-1)$ bằng

A. 5. **B.** 26. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_{-1}^{3}f'(x)\mathrm{d}x=15\Leftrightarrow f(x)\Big|_{-1}^{3}=15\Leftrightarrow f(3)-f(-1)=15\Leftrightarrow f(-1)=f(3)-15=-4$.

Câu 21. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=3$. Tính $P=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{f(x)+2}-1}{\sqrt{x+5}-2}$.

A. 6. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)+1}{x+1}=3\Rightarrow f(x)+1=(x+1)h(x)\Rightarrow f(-1)=-1$.

Vậy $P=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{f(x)+2}-1}{\sqrt{x+5}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left[f(x)+1\right]\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{f(x)+2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{f(x)+1}{x+1}.\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{f(x)+2}+1}\right)=3.\frac{\sqrt{-1+5}+2}{\sqrt{-1+2}+1}=6$.

Câu 22. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\ln a=x;\ln b=y$. Tính $\ln\left(a^3b^2\right)$.

A. $P=x^2y^3$. **B.** $P=6xy$. **C.** $P=3x+2y$. **D.** $P=x^2+y^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln\left(a^3b^2\right)=\ln a^3+\ln b^2=3\ln a+2\ln b=3x+2y$.

Câu 23. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-\cos 2x$ là

A. $x^2+\frac{1}{2}\sin 2x$. **B.** $x^2+\sin 2x$. **C.** $x^2-\frac{1}{2}\sin 2x$. **D.** $x^2-\sin 2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x-\cos 2x)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{2}\sin 2x+C$, với $C\in\mathbb{R}$.

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-\cos 2x$ là $x^2-\frac{1}{2}\sin 2x$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}$ Tính $S=f(1)+f(2)+...+f(2022)$.

A. $S=\frac{2022-\sqrt{2022}}{2022}$. **B.** $S=\frac{2022-\sqrt{2022}}{2023}$.

C. $S=\frac{2023-\sqrt{2023}}{2023}$. **D.** $S=2022$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

Ta có $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$,.

$f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\forall x\in D$

Vậy ta có $S=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+...+\left(\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2023}}=\frac{2023-\sqrt{2023}}{2023}$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	2018	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **<u>C.</u>** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét đồ thị hàm số $y=f(x+2017)-2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ song song với trục Ox sang trái 2017 đơn vị, rồi sau đó tịnh tiến song song với trục Oy xuống dưới 2018 đơn vị.

Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ như sau

x	$-\infty$		-2017		-2016		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4036	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x+2017)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ nằm phía trên trục hoành.

+ Và phần đối xứng của đồ thị $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ nằm phía dưới trục hoành.

Do đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ như sau

x	$-\infty$		x_0		-2017		-2016		$+\infty$
$\left|g(x)\right|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4036	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=2019$ có 4 nghiệm.

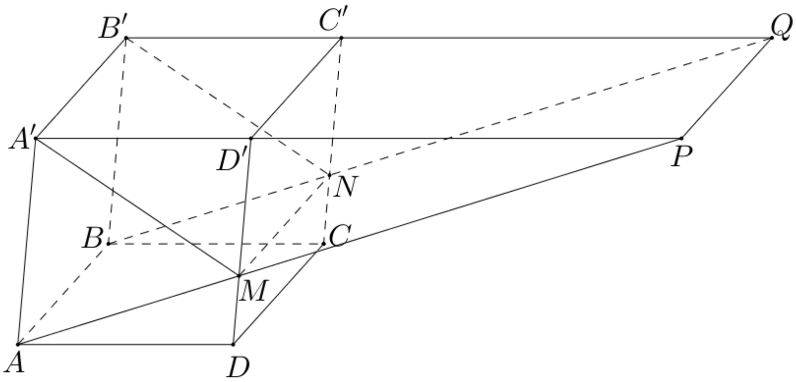
Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V, gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{D'M}=2\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NC}$, đường thẳng AM cắt đường $A'D'$ tại P, đường thẳng BN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q. Gọi V' là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A', B', P, Q, M, N. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **<u>C.</u>** 1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V' = V_{PMD'.QNC'} + V_{A'D'M.B'C'N}$

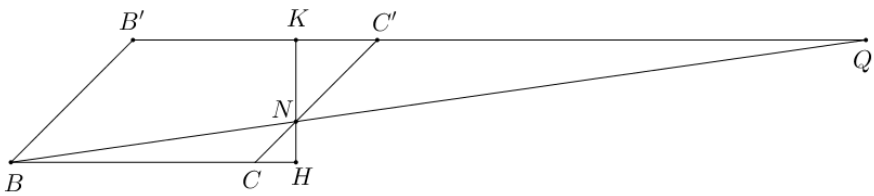


Theo giả thiết:

$\overrightarrow{D'M} = 2\overrightarrow{MD} \Rightarrow M$ nằm trên đoạn $D'D$ và $D'M = \dfrac{2}{3}D'D$.

$\overrightarrow{C'N} = 2\overrightarrow{NC} \Rightarrow N$ nằm trên đoạn $C'C$ và $C'N = \dfrac{2}{3}C'C$.

*) Ta có: $\dfrac{V_{PMD'.QNC'}}{V} = \dfrac{d\left(D',\left(NQC'\right)\right).S_{NQC'}}{d\left(D',\left(BCC'B'\right)\right).S_{BCC'B'}} = \dfrac{S_{NQC'}}{S_{BCC'B'}}$



Trong $(BB'C'C)$ qua N kẻ HK vuông với BC, $B'C'$ $(H \in BC, K \in B'C')$.

$BC // B'C' \Rightarrow \dfrac{NK}{NH} = \dfrac{NC'}{NC} = 2 \Rightarrow NK = 2NH$, $NH = \dfrac{1}{3}HK$.

$BC // B'C' \Rightarrow \dfrac{QC'}{BC} = \dfrac{C'N}{CN} = 2 \Rightarrow QC' = 2BC$.

$S_{QNC'} = \dfrac{1}{2}NK.QC' = \dfrac{1}{2}.2NH.2BC = 4.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}HK.BC = \dfrac{2}{3}S_{BB'C'C}$.

Từ đó ta được: $\dfrac{V_{PMD'.QNC'}}{V} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{PMD'.QNC'} = \dfrac{2}{3}V$.

*) Tương tự: $\dfrac{V_{A'D'M.B'C'N}}{V} = \dfrac{S_{A'D'M}}{S_{A'D'DA}} = \dfrac{S_{A'D'M}}{2S_{A'D'D}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{D'M}{D'D} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{A'D'M.B'C'N} = \dfrac{1}{3}V$.

Khi đó: $V' = \dfrac{2}{3}V + \dfrac{1}{3}V = V$. Vậy $\dfrac{V'}{V} = 1$.

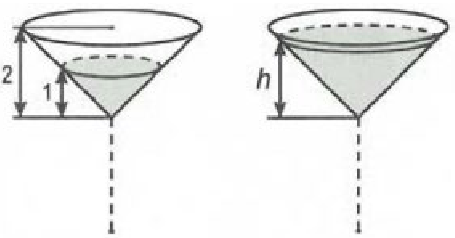
Ghi chú: Có thể tính tỉ số $\dfrac{S_{NQC'}}{S_{BCC'B'}}$ theo cách khác như sau:

$$\frac{S_{QNC'}}{S_{QB'B}} = \frac{QC'}{QB'}.\frac{QN}{QB} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{QNC'} = \frac{4}{5}.S_{BB'C'N}\ (1)$$

$$\frac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \frac{CN}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CBN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{BCC'B'} \Rightarrow S_{BB'C'N} = \frac{5}{6}SBB'C'\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{QNC'}}{S_{BB'C'C}} = \frac{4}{5}.\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$.

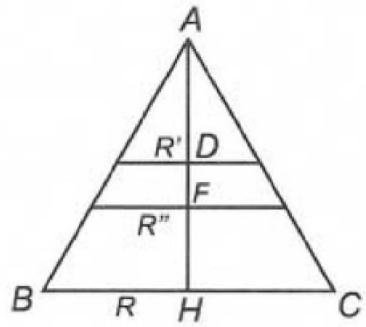
Câu 27. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao là $2\,(dm)$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thư hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1(dm)$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (Độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01(dm)$).



A. $h \approx 1,73(dm)$. **B.** $h \approx 1,89(dm)$. **C.** $h \approx 1,91(dm)$. **D.** $h \approx 1,41(dm)$

Lời giải.

Chọn C



Chiều cao của hình nó khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất là $AH = 2$
Chiều cao của phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai là $AD = 1$
Chiều cao phần nước ở ly thứ hai là $AF = h$

Theo ta lét ta có $\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}, \frac{R"}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2} \Rightarrow R' = \frac{R}{2}, R" = \frac{RH}{2}$

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất là $V = 2\pi R^2$

Thể tích phần nước ở ly thứ hai là $V_1 = \pi R"^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$

Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất là $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$

Mà $V = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} \approx 1,91$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2022;2022)$ để phương trình $16^x - (m-1)4^{x+1} + 3m^2 - 8m + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1.x_2 > 2$

A. 2014 **B.** 2015 **C.** 2021 **D.** 2022

Lời giải

Chọn A

Ta có $16^x-4(m-1)4^x+3m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow (4^x)^2-4(m-1).4^x+3m^2-8m+4=0$

Đặt $t=4^x, t>0$, khi đó $\Delta'=4(m-1)^2-(3m^2-8m+4)=m^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m\neq 0$, khi đó $\left[\begin{array}{l}4^x=3m-2\\4^x=m-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\log_4(3m-2)\\x=\log_4(m-2)\end{array}\right.\\m>2\end{array}\right.$

Do $x_1.x_2>2$ suy ra x_1,x_2 cùng dấu

+ Nếu x_1,x_2 cùng âm thì $3m-2<1\Leftrightarrow m<1$ khi đó $m-2<-3$ loại do $4^x=m-2>0$

+ Nếu x_1,x_2 cùng dương thì $m-2>1\Leftrightarrow m>3$

Xét $x_1.x_2=\log_4(m-2).\log_4(3m-2)>2$, đặt $f(m)=\log_4(m-2).\log_4(3m-2)$ trên khoảng $(3;+\infty)$

Ta có $f'(m)=\dfrac{1}{(m-2)\ln 4}.\log_4(3m-2)+\dfrac{3}{(3m-2)\ln 4}.\log_4(m-2)>0, \forall m>3$

Suy ra $f(m)$ là hàm số đồng biến, lại có $f(m)>2\Leftrightarrow f(m)>f(6)\Leftrightarrow m>6\Rightarrow m\in(6;2022)$

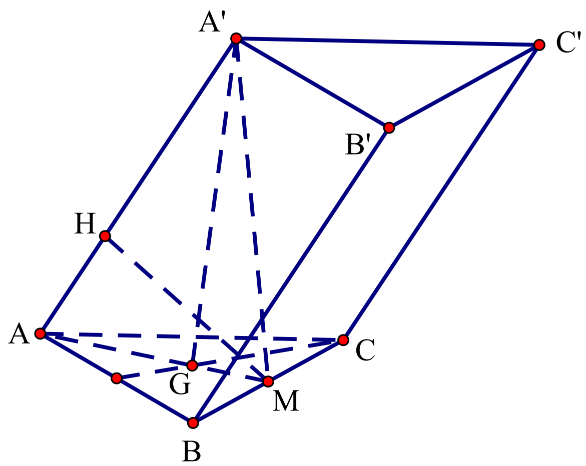
Vậy có 2014 giá trị nguyên của *m* thoả mãn

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết thể tích của khối lăng trụ là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $A'G\perp(ABC)$.

Thể tích lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.A'G \Leftrightarrow \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.A'G\Rightarrow A'G=a$.

Nhận thấy $BC\perp AM$; $BC\perp A'G$ nên $BC\perp(A'AG)$.

Kẻ $MH\perp AA'$ tại H, ta có MH là đoạn vuông góc chung của BC và AA'.

Do đó $MH=d(AA';BC)$.

Ta có $S_{\Delta A'AM}=\dfrac{1}{2}A'G.AM=\dfrac{1}{2}MH.A'A$, suy ra $MH=\dfrac{A'G.AM}{AA'}=\dfrac{A'G.AM}{\sqrt{A'G^2+AG^2}}$

Tam giác đều ABC có $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Do đó $MH=\dfrac{A'G.AM}{\sqrt{A'G^2+AG^2}}=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{3}}}=\dfrac{3a}{4}$. Vậy $d\left(AA';BC\right)=\dfrac{3a}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} e^x+m & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)dx=ae+b\sqrt{3}+c$, $\left(a,b,c\in Q\right)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+m\right)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f\left(0\right)=m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^{0} 2x\sqrt{3+x^2}dx+\int\limits_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{3+x^2}d\left(3+x^2\right)+\int\limits_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx$

$=\dfrac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^{0}+\left(e^x-x\right)\Big|_0^1=e+2\sqrt{3}-\dfrac{22}{3}$.

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=-\dfrac{22}{3}$.

Vậy tổng $a+b+3c=-19$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ cắt đường thẳng $y=2-x$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho O,B,C là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 2, biết B và C không nằm trên trục Oy

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\left(C\right)$ đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ và $d:x+y-2=0$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+2=2-x$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(3m-2\right)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\to y=2 \\ x^2+2mx+3m-2=0\left(*\right)\end{array}\right.$

Từ giả thiết $A\left(0;2\right)$.

Để $\left(C\right)$ cắt d tại ba điểm phân biệt B và C $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt và khác 0

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3m-2\ne 0 \\ m^2-3m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ne\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2\end{array}\right.\end{cases}$.

Gọi $B\left(x_1;2-x_1\right)$, $C\left(x_2;2-x_2\right)$

Từ $(*)$, theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1.x_2=3m-2 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có $d(O,d)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}.d(O,d).BC \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{2}}.BC=2 \Leftrightarrow BC^2=8$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(2-x_2-2+x_1)^2=8 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-4=0$.

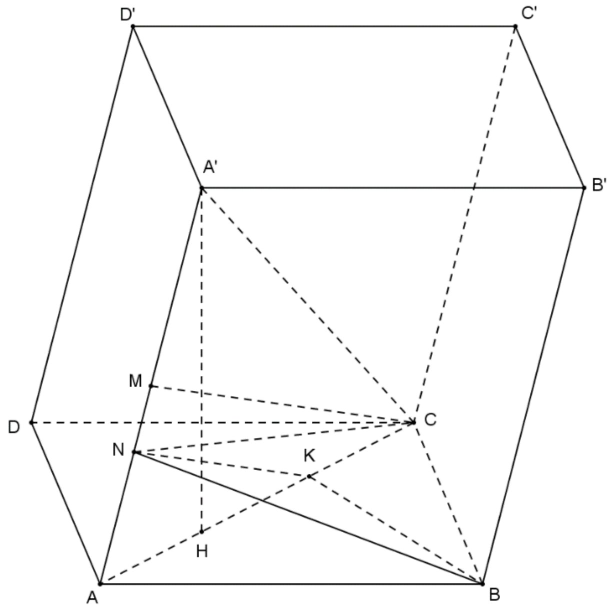
$\Leftrightarrow m^2-3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}(tm) \\ m=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(tm) \end{array}\right.$.

Câu 32. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2\sqrt{3}$; $AD=\sqrt{6}$; $A'C=3\sqrt{2}$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$; $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Thể tích V của khối chóp $A.A'B'C'D'$ là

A. $V=32\sqrt{5}$. **B.** $V=4\sqrt{5}$. **C.** $V=16\sqrt{2}$. **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của AA'. Kẻ $A'H$ vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K, KN vuông góc với AA' tại N.

Do $(AA'C'C)\perp(ABCD)$ suy ra $A'H\perp(ABCD)$ và $BK\perp(AA'C'C)\Rightarrow BK\perp AA'$

$\Rightarrow AA'\perp(BKN)\Rightarrow AA'\perp NB$ suy ra $\left(\widehat{(AA'C'C),(AA'B'B)}\right)=\widehat{KNB}=\alpha$.

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2\sqrt{3}$; $AD=\sqrt{6}$ suy ra $BD=AC=3\sqrt{2}$.

Suy ra $\Delta ACA'$ cân tại C. Suy ra $CM\perp AA'\Rightarrow KN // CM$.

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{NK}{MC}$.

Xét ΔABC vuông tại B có BK là đường cao suy ra $BK=\dfrac{AB.BC}{AC}=2$ và $AB^2=AK.AC$.

$\Rightarrow AK = \dfrac{AB^2}{AC} = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔNKB vuông tại K có $\tan\alpha = \dfrac{KB}{KN} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow KN = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét ΔANK vuông tại N có $KN = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $AK = 2\sqrt{2}$ suy ra $AN = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{3}}{AM} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{MC} \Rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{10} \\ CM = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AA' = 2\sqrt{10}.$$

Lại có: $A'H.AC = CM.AA' \Rightarrow A'H = \dfrac{CM.AA'}{AC} = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $A.A'B'C'D'$ là: $V = \dfrac{1}{3}.A'H.AB.AD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4\sqrt{10}}{3}.2\sqrt{3}.\sqrt{6} = \dfrac{16\sqrt{5}}{3}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x^3 - 3x)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

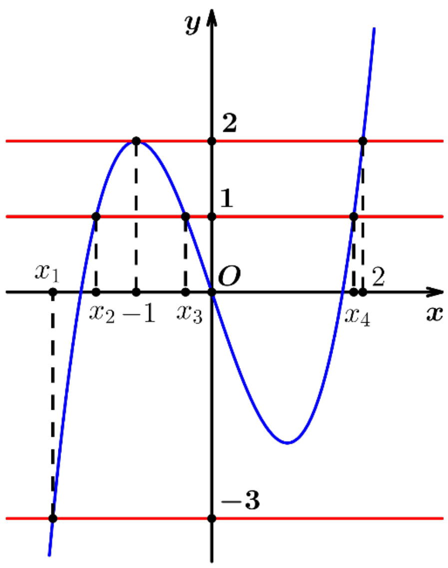
Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x)$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = g'(x) = (3x^2 - 3) f'(x^3 - 3x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \\ x = 1 & \\ x^3 - 3x = -3 & (1) \\ x^3 - 3x = 1 & (2) \\ x^3 - 3x = 2 & (3) \end{array}\right.$$

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$



Phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm $x_1<x_2<-1<x_3<1<x_4<2$, trong đó nghiệm $x=-1$ là nghiệm bội bậc 3, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn. Do đó, $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=-\infty$. Do đó, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		-1		x_3		1		x_4		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Chú ý rằng nếu qua điểm x_0 mà $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thì điểm x_0 là điểm cực tiểu.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực tiểu là x_2, x_3 và x_4.

Câu 34. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

A. $\dfrac{19}{2}$. **B.** $\dfrac{21}{2}$. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^2-2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$5+16.4^t=\left(5+16^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \dfrac{5+4^{t+2}}{7^{t+2}}=\dfrac{5+4^{2t}}{7^{2t}}$.(1)

Xét hàm số $f(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u\ln\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u\ln\dfrac{4}{7}<0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(u)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow t+2=2t\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$.

Khi đó $P=\dfrac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$.

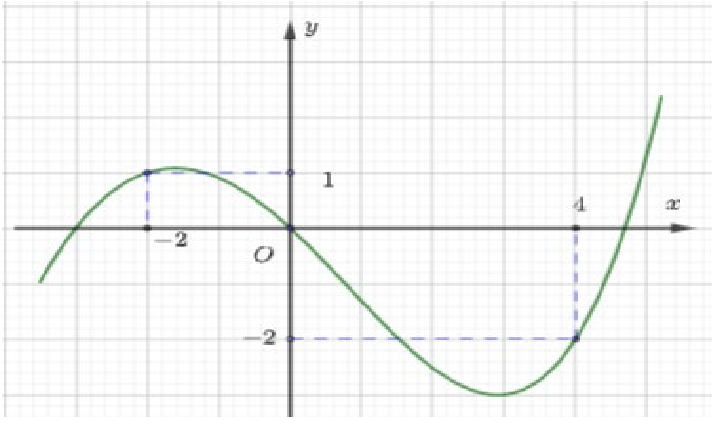
Ta có $P'=\dfrac{-4x^2-22x-10}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

Từ đó suy ra $M=7$, $m=\dfrac{5}{2}$ nên $M+m=\dfrac{19}{2}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ sao cho $f(0)=2$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=4f(x-2)+x^2-4x$ trên đoạn $[0;6]$ bằng

A. 3. **B.** $g(2)$. **C.** $g(0)$. **D.** $g(6)$.

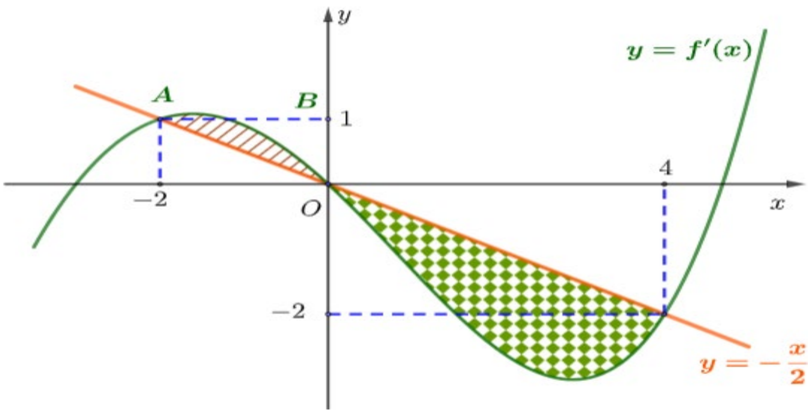
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(x-2)+x^2-4x$ cũng là hàm số bậc bốn.

Ta có $g'(x)=4\left[f'(x-2)-\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)\right]$.

Xét hai đồ thị hàm số $y=f'(u)$ và $y=-\dfrac{u}{2}$ dưới đây:



Từ đó ta có $g'(u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-2 \\ u=0 \\ u=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$

BBT của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
$u=x-2$			-2		0		4		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(0)$	↗	4	↘	$g(6)$	↗	$+\infty$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$g(2)-g(0)=\int_0^2 g'(x)\mathrm{d}x=4\int_0^2\left[f'(x-2)-\left(-\frac{x-2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=4\int_{-2}^{0}\left[f'(t)-\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t<4.S_{OAB}=4.\frac{1}{2}.1.2=4$$

Suy ra $g(0)>g(2)-4=0$.

$$g(2)-g(6)=-\int_2^6 g'(x)\mathrm{d}x=-4\int_2^6\left[f'(x-2)-\left(-\frac{x-2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=-4\int_0^4\left[f'(t)-\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t=4\int_0^4\left[\left(-\frac{t}{2}\right)-f'(t)\right]\mathrm{d}t>4S_{OAB}=4.$$

Suy ra: $g(6)<g(2)-4=0$.

Từ đó ta có: $g(6)<0<g(0)$.

Căn cứ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[0;6]} g(x)=g(6)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3-2(m+2)x^2+\left(-m^2+9m+4\right)x+2m^2-10m$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=x^3-2(m+2)x^2+\left(-m^2+9m+4\right)x+2m^2-10m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox khi và chỉ khi đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt hay phương trình $x^3-2(m+2)x^2+\left(-m^2+9m+4\right)x+2m^2-10m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $x^3-2(m+2)x^2+\left(-m^2+9m+4\right)x+2m^2-10m=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-2(m+1)x-m^2+5m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-2(m+1)x-m^2+5m=0 \quad (*) \end{array}\right..$$

Ta tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2, ta có điều kiện

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-4m-4-m^2+5m\neq 0 \\ m^2+2m+1+m^2-5m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+m\neq 0 \\ 2m^2-3m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Suy ra các giá trị m cần tìm là $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;2;3;4;5\}$.

Câu 37. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x)=x^3-mx^2+12x+2m$. Ta có $f'(x)=3x^2-2mx+12$ và $f(1)=13+m$.

Để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-mx^2+12x+2m\right)=+\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2mx+12\ge 0,\forall x>1\\ 13+m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\\ m\ge -13\qquad\quad (*)\end{cases}.$$

Xét $g(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$: $g'(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}=0\Rightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\ \Leftrightarrow m\le 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13\le m\le 6$. Vì m nguyên nên $m\in\{-13;-12;-11;...;5;6\}$.

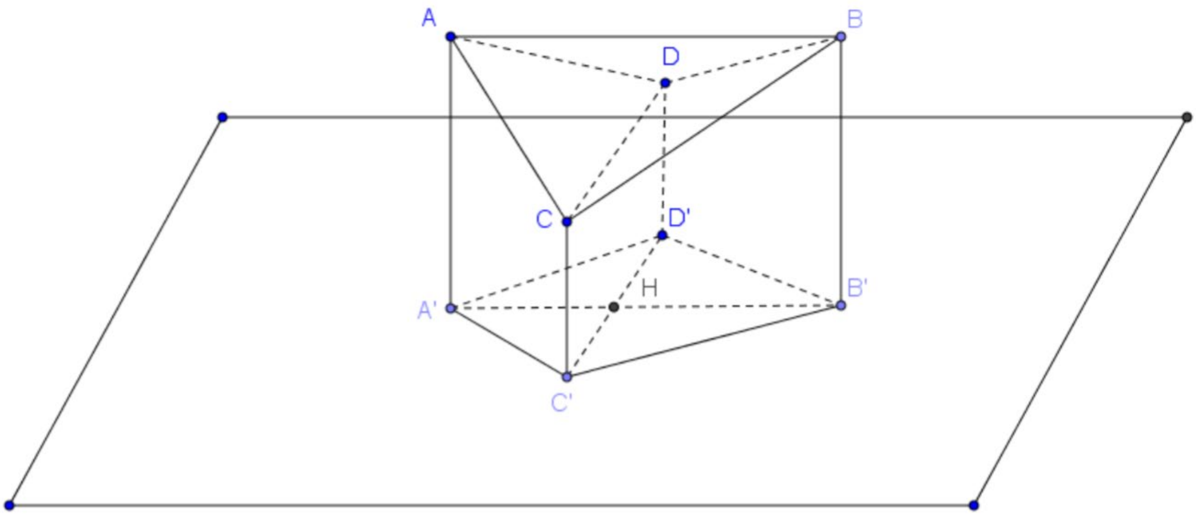
Vậy có 20 giá trị nguyên của m.

Câu 38. Hai quả bóng giống nhau có cùng bán kính là R và hai quả bóng giống nhau có bán kính nhỏ hơn r được đặt sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với các quả bóng khác (4 quả bóng đều nằm trên một mặt phẳng). Tỉ số $\dfrac{r}{R}$ là?

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r là bán kính quả bóng nhỏ.

Gọi A,B lần lượt là tâm của hai quả bóng lớn. $C;D$ lần lượt là tâm của hai quả bóng nhỏ.

Gọi $A';B';C';D'$ lần lượt là hình chiếu của $A;B;C;D$ lên mặt phẳng. Ta có $AA'=BB'=R$, $CC'=DD'=r$.

Do mỗi quả bóng đều tiếp xúc với 3 quả còn lại nên ta có $AC=AD=BC=BD=r+R$; $AB=2R$; $CD=2r$. Gọi H là giao điểm của $A'B'$ và $C'D'$.

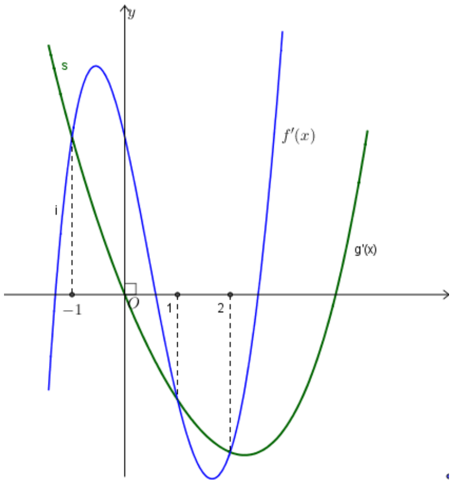
Ta thấy $A'B'C'D'$ là hình thoi nên $A'H=B'H=\dfrac{A'B'}{2}=\dfrac{AB}{2}=R$; $C'H=D'H=\dfrac{C'D'}{2}=\dfrac{CD}{2}=r$.

Áp dụng định lý Pytago ta có $BC^2 = B'C'^2 + (BB' - CC')^2 = C'H^2 + B'H^2 + (BB' - CC')^2$.

Từ đó ta có $(r+R)^2 = r^2 + R^2 + (R-r)^2 \Leftrightarrow r = (2-\sqrt{3})R$.

Vậy $\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{3}$.

Câu 39. Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$; $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(m,n,p,q,r,a,b,c,d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình bên



Gọi S là tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **B.** $S \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S \in (0;1)$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $m \neq 0$ và xét $f(0) = g(0) \Rightarrow r = d = 0$.

Từ đồ thị có $f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-2)$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 4mx^3 - 8mx^2 - 4mx + 8m$ (1).

Mặt khác $f'(x) - g'(x) = mx^3 + 3(n-a)x^2 + 2(p-b)x + q - c$ (2).

Từ (1) và (2) cho ta $\begin{cases} 3(n-a) = -8m \\ 2(p-b) = -4m \\ q - c = 8m \end{cases}$.

Xét phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = ax^3 + bx^2 + cx$

$\Leftrightarrow x\left[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + q - c\right] = 0$

$\Leftrightarrow x.\left[mx^3 - \frac{8m}{3}x^2 - 2mx + 8m\right] = 0$

$\Leftrightarrow mx\left(x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$ có đúng 1 nghiệm thực là $x_0 \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

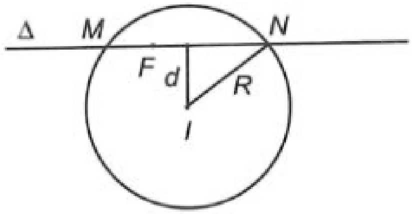
Vậy phương trình $f(x) = g(x)$ có tổng các nghiệm $S = 0 + x_0 \Rightarrow S \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của tham số thực m để tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất là

A. $m = -\dfrac{13}{16}$.   **B.** $m = \dfrac{13}{16}$.   **C.** $m = -\dfrac{16}{13}$.   **D.** $m = \dfrac{16}{13}$.

Lời giải

Chọn B



Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1), R = 2$.

Ta có $A(1;1-m); y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = (4-4m)(x-1) + 1 - m$.

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\dfrac{3}{4};0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ).

Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N Khi đó

$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I;\Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I;\Delta)}$

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I;\Delta)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$

Khi đó đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF} = \left(\dfrac{3}{4};-1\right); \vec{u} = (1;4-4m)$ nên

$\vec{u}.\overrightarrow{IF} = 0 \Leftrightarrow 1.\dfrac{3}{4} - (4-4m) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{13}{16}$.

Câu 41. Gọi X là tập chứa tất cả các số tự nhiên có 13 chữ số và chỉ gồm các chữ số "0" và "1" chọn ngẫu nhiên từ X một số tự nhiên. Xác suất để chọn được số tự nhiên chia hết cho 30 là

A. $\dfrac{85}{512}$.   **B.** $\dfrac{683}{4096}$.   **C.** $\dfrac{341}{2048}$.   **D.** $\dfrac{341}{4096}$.

Lời giải

Chọn B

Có X là tập chứa tất cả các số tự nhiên có 13 chữ số và chỉ gồm các chữ số "0" và "1".

Suy ra các phần tử x thuộc X luôn có số hạng đầu là 1 còn 12 vị trí xếp cho các chữ số "0" và "1".

Nên các phần tử x thuộc X chứa $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ chữ số 1.

Suy ra số phần tử của tập X là:

$1 + C_{12}^1 + C_{12}^2 + C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 + C_{12}^6 + C_{12}^7 + C_{12}^8 + C_{12}^9 + C_{12}^{10} + C_{12}^{11} + C_{12}^{12} = 2^{12} = 4096$.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4096$.

Gọi A là biến cố thỏa yêu cầu bài.

Gọi x là số tự nhiên có 13 chữ số và x chia hết cho 30.

Có x chia hết cho 30 nên x có chữ số tận cùng là 0.

x chỉ gồm các số "0" và "1" nên chữ số đầu phải là 1.

x chia hết cho 3 nên x phải chứa thêm 2 chữ số 1, hoặc 5 chữ số 1 hoặc 8 chữ số 1 hoặc 11 chữ số 1.

TH1: x chứa thêm 2 chữ số 1 có C_{11}^{2} (số).

TH2: x chứa thêm 5 chữ số 1 có C_{11}^{5} (số).

TH3: x chứa thêm 8 chữ số 1 có C_{11}^{8} (số).

TH4: x chứa thêm 11 chữ số 1 có C_{11}^{11} (số).

Số các số x là $C_{11}^{2}+C_{11}^{5}+C_{11}^{8}+C_{11}^{11}=55+462+165+11=683$.

Suy ra $n(A)=683$.

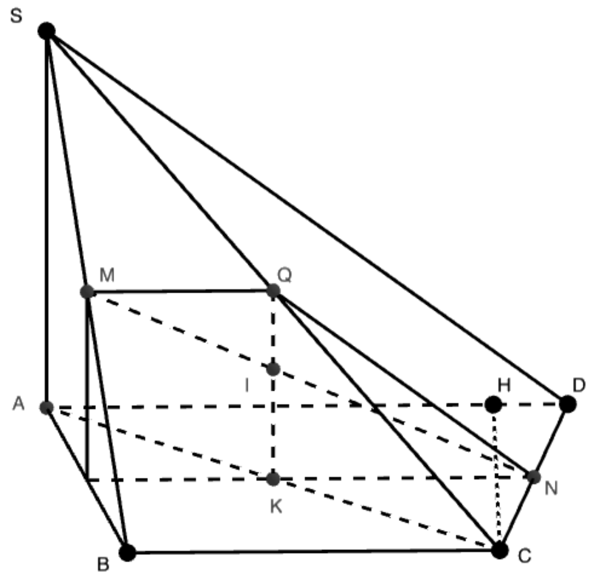
Xác suất để chọn được số tự nhiên chia hết cho 30 là: $p=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{683}{4096}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD=2AB=2BC=2CD=2a$, $SA=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **B.** $\frac{3\sqrt{310}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{310}}{20}$. **D.** $\frac{\sqrt{310}}{40}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (α) là mp đi qua MN và song song với mp (SAD). Khi đó (α) cắt AB tại P, cắt SC tại Q, cắt AC tại K.

Gọi I là giao điểm của MN và QK

Suy ra: P, Q, K lần lượt là trung điểm của AB, SC và AC.

Lại có: $ABCD$ là hình thang cân có $AD=2AB=2BC=2CD=2a$

$\Rightarrow MP=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$ và $NP=\frac{3a}{2}$

Xét ΔMNP vuông tại P: $MN=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

MP, KQ lần lượt là đường trung bình của $\Delta SAB, \Delta SAC \Rightarrow MP//KQ//SA$

KN là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow KN=\frac{1}{2}AD=a$.

Gọi H là hình chiếu của C lên AD $\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$KC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} CN\perp AC \\ CN\perp SA \end{cases} \Rightarrow CN\perp(SAC)$

$\begin{cases} MN\cap(SAC)=I \\ NC\perp(SAC)\, tai\, C \end{cases} \Rightarrow IC$ là hình chiếu của MN lên mặt phẳng (SAC).

Suy ra $\left[\widehat{MN,(SAC)}\right]=\left(\widehat{MN,IC}\right)=\widehat{CIN}$

$\frac{IN}{MN}=\frac{KN}{NP}=\frac{2}{3}\Rightarrow IN=\frac{2}{3}MN=\frac{a\sqrt{10}}{3}$

$IC=\sqrt{IN^2-NC^2}=\frac{a\sqrt{31}}{6}$

$\Rightarrow \cos\widehat{NIC}=\frac{IC}{IN}=\frac{\sqrt{310}}{20}$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để đồ thị của hàm số $y=\frac{x+5}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 4044. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn A

Xét các trường hợp sau:

+ Với $m=0$: Hàm số trở thành $y=x+5$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m<0$:

Hàm số $y=\frac{x+5}{\sqrt{mx^2+1}}=\frac{x+5}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}};\frac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$ suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y$ hay đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m>0$:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y=\frac{1}{\sqrt{m}}; y=-\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m>0$.

Mặt khác $-2022\le m\le 2022$ và $m\in\mathbb{Z}$.

Do đó $m\in\{1;2;...;2022\}$. Vậy có 2022 số nguyên m phải tìm.

Câu 44. Cho phương trình $10^{3m}+10^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.

A. $\left(0;\frac{1}{2}\log 2\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2}\log 2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{10}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\log 2\right]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\in[-1;1]$

Ta có $10^{3m}+10^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow 10^{3m}+10^{m}=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2+1\right]$

$\Leftrightarrow 10^{3m}+10^{m}=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^3+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)(*)$

Xét hàm $h(t)=t^3+t\to h'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên từ phương trình (*) ta được:

$h\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)=h\left(10^m\right)\to x+\sqrt{1-x^2}=10^m$ (**)

Xét $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}, x\in[-1;1]$ ta có $f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$.

x	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	1

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (**) có nghiệm

$\Leftrightarrow 0<10^m\le f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\log\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log 2$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(x)+2f(1-x)=3x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x).dx=\frac{a}{b}$, (với a,b là các số nguyên dương, và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a-b$.

A. $T=-7$. **B.** $T=16$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int_0^1 x.f'(x).dx=x.f(x)|_0^1-\int_0^1 f(x).dx=f(1)-\int_0^1 f(x).dx$

+ Từ điều kiện $f(x)+2f(1-x)=3x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$,

Cho $x=0 \Rightarrow f(0)+2f(1)=4$

Cho $x=1 \Rightarrow f(1)+2f(0)=7$

Suy ra: $\begin{cases} f(0)=\dfrac{10}{3} \\ f(1)=\dfrac{1}{3}, \ (1) \end{cases}$

+ Ta có: $\int\limits_0^1 f(x).dx=\int_0^1 f(1-x).dx$.

$f(x)+2f(1-x)=3x^2+4 \Rightarrow \int_0^1\left[f(x)+2f(1-x)\right].dx=\int_0^1\left(3x^2+4\right).dx \Leftrightarrow 3.\int_0^1 f(x).dx=5$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x).dx=\dfrac{5}{3},(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $I=\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{-4}{3}=\dfrac{a}{b} \Rightarrow T=a-b=-4-3=-7$.

Câu 46. Phương trình $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2}-\sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{2}$ có tích các nghiệm trên $(-\pi;0)$ là

A. $-\dfrac{\pi^2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{8}$. **C.** $\dfrac{5\pi^2}{72}$. **D.** $-\dfrac{\pi^2}{32}$.

Lời giải

Chọn B

$\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2}-\sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x.\dfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)-\sin x.\dfrac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin x\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-2\sin^2 x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \\ \sin x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Suy ra có hai nghiệm thuộc $(-\pi;0)$ là $-\dfrac{\pi}{4}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tích hai nghiệm là $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Câu 47. Bạn Mai là sinh viên năm cuối chuẩn bị ra trường, nhờ có công việc làm thêm mà Mai có một khoản tiết kiệm nhỏ, Mai muốn gửi tiết kiệm để chuẩn bị mua một chiếc xe máy Honda Lead trị giá 45 triệu đồng để tiện cho công việc. Vì vậy, Mai đã quyết định gửi tiết kiệm theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,8\%/1$ tháng và mỗi tháng Mai đều đặn gửi tiết kiệm một khoản tiền là 3 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, Mai đủ tiền để mua xe máy?

A. 14 tháng. **B.** 16 tháng. **C.** 17 tháng. **D.** 15 tháng.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là số tiền bạn Mai gửi mỗi tháng và $r\%$ là lãi suất mỗi tháng.

Sau 1 tháng, bạn Mai có số tiền là $A+A\cdot r\%=A(1+r\%)$.

Đầu tháng thứ 2, bạn Mai có số tiền là $A+A(1+r\%)$.

Cuối tháng thứ 2, bạn Mai có số tiền là

$$A+A(1+r\%)+\left[A+A(1+r\%)\right]\cdot r\%=A(1+r\%)+A(1+r\%)^2.$$

Đầu tháng thứ 3, bạn Mai có số tiền là $A+A(1+r\%)+A(1+r\%)^2$.

Tiếp tục quá trình trên, ta có sau n tháng, số tiền bạn Mai có là

$$A(1+r\%)+A(1+r\%)^2+\dots+A(1+r\%)^n=A(1+r\%)\cdot\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}.$$

Suy ra, ta có: $3\cdot(1+0,8\%)\cdot\dfrac{(1+0,8\%)^n-1}{0,8\%}\geq 45\Rightarrow n\geq 14,12$.

Vậy sau ít nhất 15 tháng, bạn Mai sẽ đủ tiền để mua xe máy.

Câu 48. Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0\leq x,y\leq 2022$ và $\left(x^2y+2x^2+y+2\right)\log_5\left(\dfrac{7y}{y+18}\right)\leq(3x+3y-xy-9)\log_3\left(\dfrac{3x+1}{x-3}\right)$

A. 6057. **B.** 3. **C.** 4038. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}\dfrac{7y}{y+18}>0\\ \dfrac{3x+1}{x-3}>0\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $0\leq x,y\leq 2022$ suy ra $x\geq 4; y\geq 1$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ trên $[4;+\infty)$

Có $f(x)=\dfrac{-10}{(x-3)^2}<0,\forall x\geq 4$ và ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

Suy ra $3<f(x)\leq 13\Rightarrow \log_3 f(x)>0,\forall x\geq 4$.

Ta có

$$\left(x^2y+2x^2+y+2\right)\log_5\left(\frac{7y}{y+18}\right)\leq(3x+3y-xy-9)\log_3\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(y+2)\log_5\left(\frac{7y}{y+18}\right)\leq(x-3)(3-y)\log_3\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)\quad(*)$$

TH1: $y>3$ ta có $6y>18\Rightarrow 7y>y+18>0\Rightarrow\dfrac{7y}{y+18}>1\Rightarrow\left(x^2+1\right)(y+2)\log_5\left(\dfrac{7y}{y+18}\right)>0$.

Mặt khác $y>3\Leftrightarrow 3-y<0\Rightarrow(x-3)(3-y)\log_3\left(\dfrac{3x+1}{x-3}\right)<0$.

Suy ra $y>3$ thì bpt $(*)$ không thỏa mãn.

TH2: $y\leq 3$.

Suy ra $6y \le 18 \Rightarrow 0 < 7y \le y+18 \Rightarrow \frac{7y}{y+18} \le 1 \Rightarrow (x^2+1)(y+2)\log_5\left(\frac{7y}{y+18}\right) \le 0$.

Với $y \le 3 \Leftrightarrow 3-y \ge 0 \Rightarrow (x-3)(3-y)\log_3\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) \ge 0$.

Do đó bpt $(*)$ luôn đúng với $y \le 3$.

Kết hợp điều kiện thì $y \in \{1;2;3\}$.

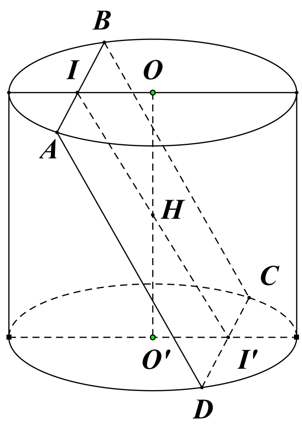
Mà $x \in \{4;5;..;2022\}$ nên có $3.2019 = 6057$ bộ số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ (như hình vẽ); H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \frac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

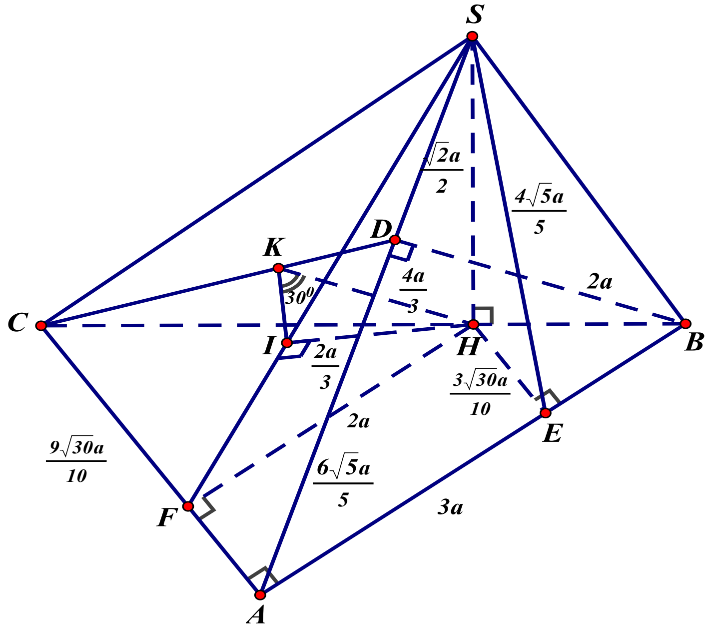
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3a, AC = \frac{9\sqrt{30}a}{10}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn thẳng BC. Biết rằng $HC = 2HB$ và $SH = \frac{\sqrt{2}a}{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(SAB)\cap(SAC)=SA$, kẻ $BD\perp SA$ và $HK//BE$, suy ra

$$((SAB),(SAC))=(HK,(SAC))=\widehat{IKH}.$$

Ta tính được $HE=\dfrac{3\sqrt{30}a}{10}$, $HF=2a$.

Suy ra $HI=\dfrac{HS.HF}{\sqrt{HS^2+HF^2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.2a}{\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+4a^2}}\dfrac{2a}{3}$

Ta tính được $SE=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}a$ và $SA=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}a$.

Vậy $BD=\dfrac{2S_{\Delta SAB}}{SA}=\dfrac{SE.AB}{SA}=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}a.3a}{\dfrac{6\sqrt{5}}{5}a}=2a\Rightarrow HK=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{4a}{3}$.

Tam giác KIH vuông tại I có $\sin\widehat{IKH}=\dfrac{HI}{HK}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{IKH}=30^0$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 30^0.

------------- *Hết* -------------