SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THCS&THPT THỐNG NHẤT

Đề chính thức
Gồm có 6 trang

ĐỀ THI KSCL VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: Toán – Lớp 12
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian giao đề)

Mã đề thi 235

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 2. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2$

A. $\left[-2;\sqrt{3}\right]$. **B.** $\left[-\sqrt{3}-3;\sqrt{3}-1\right]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-2;0]$.

Câu 3. Cho khai triển nhị thức Newton của $(2-3x)^{2n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+........+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$. Hệ số của x^7 bằng

A. -2099520. **B.** -414720. **C.** 2099520. **D.** 414720.

Câu 4. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có một góc lớn hơn 100°.

A. $2018C_{896}^{2}$. **B.** $2018C_{896}^{3}$. **C.** C_{1009}^{3}. **D.** $2018C_{897}^{3}$

Câu 5. Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật.Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{24}{25}$. **C.** $\dfrac{9}{11}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 6. Câu 3.Biết $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1\right)=\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là một phân số tối giản. Tính $T=3a-b$.

A. $T=-13$. **B.** $T=13$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=-1,u_2=3\\u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1},\ \forall n\geq 2\end{cases}$. Số hạng thứ 7 của dãy là:

A. 1023. **B.** 3261. **C.** 309. **D.** 4284

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=a$, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM=x$? Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MEF) theo x và a?

A. $\dfrac{a}{4}\sqrt{16x^2+8a+a^2}$. **B.** $\dfrac{3a}{16}\left(4x+a\sqrt{3}\right)$. **C.** $\dfrac{3a}{16}\sqrt{16x^2+8a+3a^2}$. **D.** $\dfrac{a}{16}\sqrt{x^2-8ax+a^2}$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\arctan\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. **B.** $\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{17}$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{85}}{17}$.

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-5x-17$. Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng:

A. -8. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & x\ge 0 \\ ax-b-1. & x<0 \end{cases}$. Khi hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$, hãy tính $T=a+2b$.

A. $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=4$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2+1$. Xét hàm số $g(x)=f\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)$.

Số các nghiệm nguyên của bất phương trình $g'(x)\le 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Câu 14. Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y=x-3$.

A. $y=-x+3$ và $y=-x-1$. **B.** $y=-x-3$ và $y=-x+1$.

C. $y=x-3$ và $y=x+1$. **D.** $y=-x+2$ và $y=-x+1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=x^4-(3m+4)x^2+m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=12; m=\dfrac{-12}{9}$. **B.** $m=12$. **C.** $m=\dfrac{-12}{9}$. **D.** $m=\dfrac{12}{9}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$. Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

A. $y^{(n)}=2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$ **B.** $y^{(n)}=2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$

C. $y^{(n)}=2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n}}-\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n}}$ **D.** $y^{(n)}=2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi (C_1), (C_2), (C_3) lần lượt là đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f\left[f(x)\right]$, $y=h(x)=f\left(x^2+1\right)$. Biết rằng $f(2)=5$, $f'(2)=2$, $g'(2)=4$. Hãy tính $h'(2)$.

A. $h'(2)=2$. **B.** $h'(2)=4$. **C.** $h'(2)=6$. **D.** $h'(2)=8$.

Câu 18. Hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2-mx+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m\in[1;+\infty)$. **B.** $m\in(1;+\infty)$. **C.** $m\in[0;+\infty)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

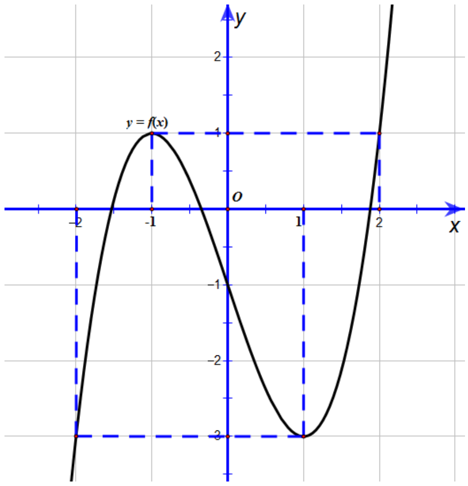
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

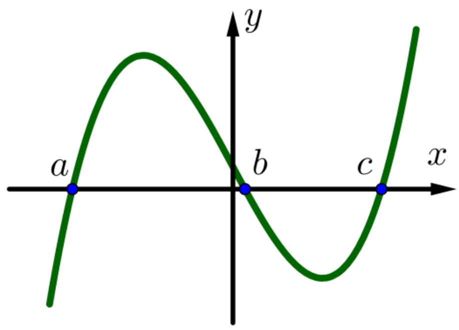
A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=(1-x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^4-3x^2-4)^{\sqrt{2}}$?

A. $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Câu 24. Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị của biểu thức $|x_1-x_2|$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4

Câu 25. Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong 3 năm đầu tiên là 6 triệu đồng /tháng. Tính từ ngày đầu tiên làm việc, cứ sau đúng 3 năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng . Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu ?

A. $6.(1,1)^4$ triệu đồng. **B.** $6.(1,1)^6$ triệu đồng.

C. $6.(1,1)^5$ triệu đồng. **D.** $6.(1,1)^{16}$ triệu đồng.

Câu 26. Cho ba số $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 27. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0$ là

A. -12. **B.** -18. **C.** 36. **D.** -2.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	1	$+$	2019	$-$	

Bất phương trình $f(x)>e^{\cos x}+m$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1$. **B.** $m<f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1$. **C.** $m\ge f(0)-e$. **D.** $m\le f(0)-e$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\log x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2|x-m|+1}\right)+f\left(x^2-2x+2\right)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30. Hàm số $y=\left(x^2-x+1\right)e^x$ có đạp hàm

A. $y'=(2x-1)e^x$. **B.** $y'=\left(x^2-x\right)e^x$. **C.** $y'=\left(x^2+x\right)e^x$. **D.** $y'=\left(x^2+1\right)e^x$.

Câu 31. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{\log_{\sqrt{2}}^2 x}+x^{2\log_2 x}-20\le 0$

A. $0<x\le\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}\le x\le 2$

C. $\frac{1}{3}\le x\le 2$ **D.** $\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$.

Câu 32. Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=25$. **C.** $S_{\min}=33$. **D.** $S_{\min}=17$.

Câu 33. Khối đa diện nào sau đây có các mặt **không phải** là tam giác đều?

A. Khối bát diện đều. **B.** Khối mười hai mặt đều.
C. Khối tứ diện đều. **D.** Khối hai mươi mặt đều.

Câu 34. Mệnh đề nào sao đây đúng?

A. Hình bát diện đều có 8 đỉnh, 12 cạnh và 6 mặt.
B. Hình bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.
C. Hình bát diện đều có 6 đỉnh, 8 cạnh và 8 mặt.
D. Hình bát diện đều có 8 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC}=120^0$ và $BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA=SB=SC=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 36. Tính thể tích V của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ biết độ dài cạnh đáy bằng $2a$ đồng thời góc tạo bởi $A'C$ và đáy $(ABCD)$ bằng $30°$.

A. $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=24\sqrt{6}a^3$. **C.** $V=8\sqrt{6}a^3$. **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

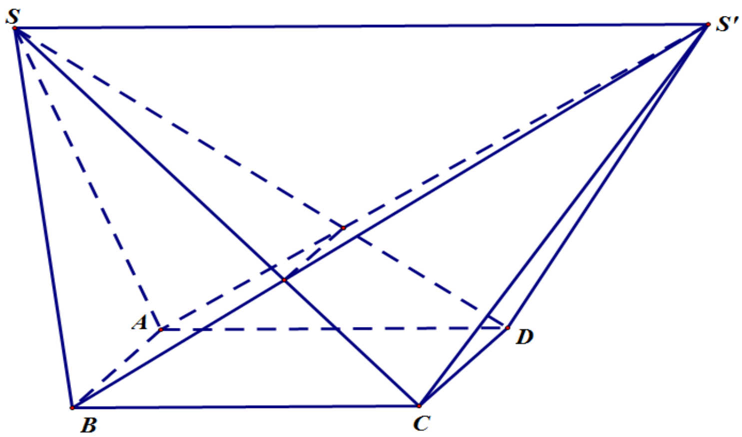
Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Góc A bằng 60^0, O là tâm hình thoi, SA vuông góc với đáy. Góc giữa SO và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $3\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\dfrac{1}{36}a^3$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\dfrac{1}{8}a^3$. **D.** $V=\dfrac{1}{12}a^3$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và thể tích $V=270$. Lấy điểm S' trong không gian sao cho $\overrightarrow{SS'}=-2\overrightarrow{CB}$. Tính thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$.



A. 120. **B.** 150. **C.** 180. **D.** 90.

Câu 40. Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=3\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $V=\pi a^3$.

Câu 41. Hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$.

Câu 42. Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng 5cm. Mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo một thiết diện có chu vi bằng 26cm. Khoảng cách từ (α) đến trục của hình trụ bằng

A. 4 cm. **B.** 5 cm. **C.** 2 cm. **D.** 3 cm.

Câu 43. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB=BC=a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Câu 44. Cho hai khối nón có chung trục $SS'=3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\frac{\pi r^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Câu 45. Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{3x^2+4}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ là

A. $3-\frac{4}{x^2}+C$. **B.** $3x^2+4\ln x+C$ **C.** $\frac{3x^2}{2}+4\ln x+C$. **D.** $x^3+4nx+C$.

Câu 46. Xét $\int\limits_1^4 \frac{f\left(2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $u=2-\sqrt{x}$ thì $\int\limits_1^4 \frac{f\left(2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int\limits_1^4 \frac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **B.** $2\int\limits_1^2 \frac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **C.** $2\int\limits_0^1 \frac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **D.** $-2\int\limits_0^1 \frac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$.

Câu 47. Cho $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln a+b)$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $ab+a+b$ bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 7.

Câu 48. Cho $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+1}}dx=a-\sqrt{b}+\ln\left(\frac{c+\sqrt{d}}{9}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 21. **B.** 15. **C.** 23. **D.** 27.

Câu 49. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=4, f'\left(0\right)=-2$ $f''\left(x\right)=x\left(2x^2+1\right)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7909}{2520}$ **B.** $\frac{7211}{2520}$ **C.** $\frac{12949}{2520}$ **D.** $\frac{5389}{2520}$

Câu 50. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 7.

---------------------------Hết---------------------------

Họ và tên thí sinh……………………………………Số báo danh………………………
Họ tên, chữ kí của giám thị coi thi………………………………………………………….

(Giám thị không giải thích gì thêm. Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi $\sin x-\cos x\neq 0\Leftrightarrow \tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Suy ra tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2$

A. $\left[-2;\sqrt{3}\right]$. **B.** $\left[-\sqrt{3}-3;\sqrt{3}-1\right]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-2;0]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-\cos x=y+2\,(*)$

Điều kiện để (*) có nghiệm

$\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2\geq(y+2)^2\Leftrightarrow(y+2)^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq y+2\leq 2\Leftrightarrow -4\leq y\leq 0.$

Suy ra tập giá trị của hàm số là $[-4;0]$.

Câu 3: Cho khai triển nhị thức Newton của $(2-3x)^{2n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+........+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$. Hệ số của x^7 bằng

A. -2099520. **B.** -414720. **C.** 2099520. **D.** 414720.

Lời giải

Chọn A.

$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+........+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}$

$\Leftrightarrow 1024=2^{2n}\Leftrightarrow n=5$

số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_{10}^k2^{10-k}(-3)^kx^k$

Hệ số của x^7 là $C_{10}^7 2^3(-3)^7$ = - 2099520.

Câu 4: Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều và có một góc lớn hơn 100°

A. $2018C_{896}^2$. **B.** $2018C_{896}^3$. **C.** C_{1009}^3. **D.** $2018C_{897}^3$

Lời giải

Chọn A.

Đa giác đều 2018 đỉnh chia đường tròn ngoại tiếp đa giác đều thành 2018 cung tròn bằng nhau có số đo là $\dfrac{360}{2018}$ độ.

Gọi tam giác cần lập là ΔABC thì A có 2018 cách chọn. Sau khi chọn A còn lại 2017 đỉnh, Để góc ở đỉnh A có số đo lớn hơn 100^0 thì cung BC không chứa đỉnh A phải có số đo lớn hơn $200°$ ứng với số cung $200^\circ : \left(\frac{360}{2018}\right)^\circ \approx 1.121,1$ cung. (số đo của cung gấp đôi số đo góc nội tiếp cùng chắn cung đó)

Mà số cung bằng số đỉnh cộng 1.

Do đó giữa B và C (trừ 2 đỉnh B, C) phải có 1121 đỉnh nên còn lại $2017-1121=896$ đỉnh để chọn cho B và C do đó có C_{896}^2 cách chọn B và C.

Vậy tất cả có: $2018.C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật.Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả

nam và nữ

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{24}{25}$. **C.** $\frac{9}{11}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xác suất cần tính là phần bù của trường hợp các học sinh được chọn là cùng giới tính

$p=1-\frac{C_5^3+C_6^3}{C_{11}^3}=\frac{9}{11}$.

Câu 6: Biết $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1\right)=\frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là một phân số tối giản. Tính $T=3a-b$.

A. $T=-13$. **B.** $T=13$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1\right)=\lim\left(\frac{n^2+3n+2-n^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}+1\right)=\lim\left(\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}+1\right)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=-1, u_2=3 \\ u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1}, \forall n\ge 2 \end{cases}$. Số hạng thứ 7 của dãy là:

A. 1023. **B.** 3261. **C.** 309. **D.** 4284

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_3=21;\ u_4=87; u_5=309; u_6=1023; u_7=3261$.

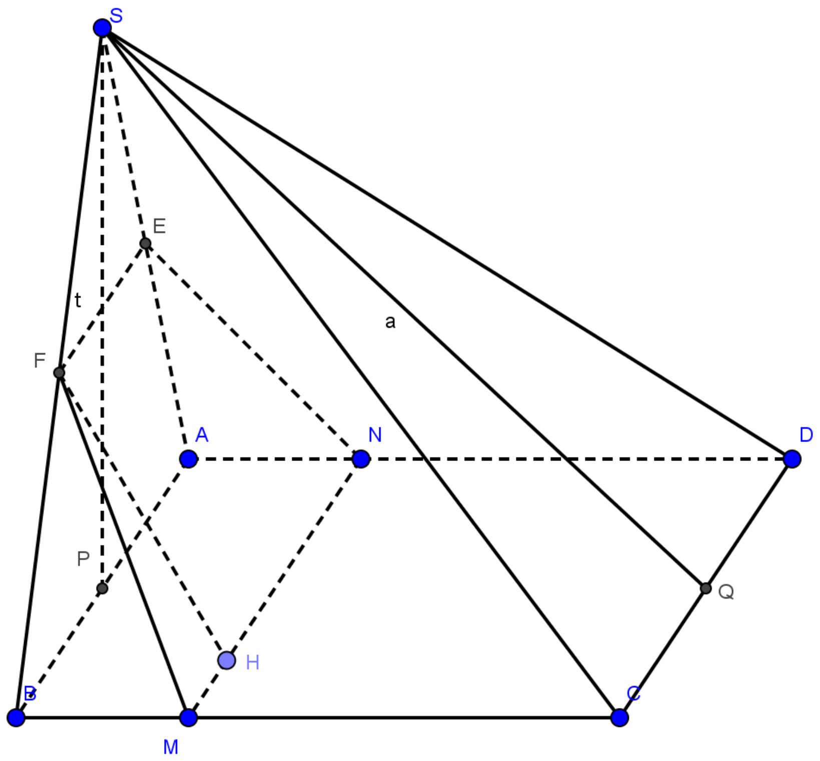
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=a$, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM=x$? Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MEF) theo x và a?

A. $\frac{a}{4}\sqrt{16x^2+8a+a^2}$. **B.** $\frac{3a}{16}\left(4x+a\sqrt{3}\right)$.

C. $\frac{3a}{16}\sqrt{16x^2+8a+3a^2}$. **D.** $\frac{a}{16}\sqrt{x^2-8ax+a^2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AB, CD.

Tam giác SAB cân tại S $\Rightarrow SP \perp AB$

Tam giác SCD cân tại $S \Rightarrow SQ \perp CD \Rightarrow SQ \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (SPQ) \Rightarrow AB \perp PQ \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

$$\cos \widehat{SBC} = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2SB.BC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MF^2 = SB^2 + BM^2 - 2SB.BM.\cos \widehat{SBC} = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2}$$

$\triangle SAD = \triangle SBC \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{FBM}$ & $AE = BF; AN = BM$

Suy ra $EFMN$ là hình thang cân.

Hạ $FH \perp MN \Rightarrow MH = \frac{a}{4} \Rightarrow FH^2 = MF^2 - MH^2 = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{3a^2}{16}$

$$\Rightarrow S_{EFMN} = \frac{1}{2} FM \left(EF + MN \right) = \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}.$$

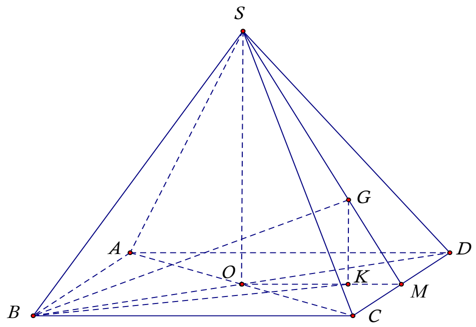
Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\arctan \frac{\sqrt{85}}{17}$. **B.** $\arctan \frac{\sqrt{10}}{17}$. **C.** $\arcsin \frac{\sqrt{85}}{17}$. **D.** $\arccos \frac{\sqrt{85}}{17}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm CD, kẻ GK song song với SO và cắt OM tại K, suy ra K là hình chiếu của G trên mp$(ABCD)$.



suy ra $\left(\widehat{BG,(ABCD)}\right) = \widehat{GBK}$.

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$, $GK = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{6}$, vì $OK = \dfrac{2}{3}OM$ nên $OK = \dfrac{a}{3}$, suy ra

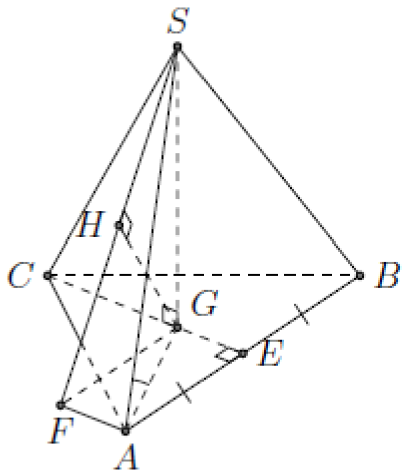
$BK = \dfrac{a\sqrt{34}}{6}$. Vậy $\tan\left(\widehat{BG,(ABCD)}\right) = \tan\widehat{GBK} = \dfrac{GK}{BK} = \dfrac{\sqrt{85}}{17}$.

Câu 10: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, G là trọng tâm tam giác ABC nên $SG \perp (ABC)$. Dựng hình chữ nhật $AEGF$, gọi H là hình chiếu vuông góc của G trên SF.

Ta có $GE//AF$ nên $GE//(SAF)$, suy ra

$d(GC, SA) = d(GC,(SAF)) = d(G,(SAF)) = GH$.

Ta có $(SA,(ABC)) = \widehat{SAG} \Rightarrow \widehat{SAG} = 60°$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SAG có $SG = AG.\tan\widehat{SAG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60° = a$; $GF = AE = \dfrac{a}{2}$.

Do GH là đường cao trong tam giác SGF vuông tại G nên:

$GH = \sqrt{\dfrac{SG^2.GF^2}{SG^2 + GF^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-5x-17$. Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng:

A. -8. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-x^2+8x-5 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-5=0$.

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Khi đó tổng $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-8}{-1}=8$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & x\geq 0 \\ ax-b-1. & x<0 \end{cases}$. Khi hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$, hãy tính $T=a+2b$.

A. $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, $f(0)=1$

Đạo hàm bên phải tại $x_0=0$: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}=b$

Đạo hàm bên trái tại $x_0=0$: $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax-b-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a-\frac{b+2}{x}\right)$

Vì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a-\frac{b+2}{x}\right) \Rightarrow b=-2$. Khi đó,

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a-\frac{b+2}{x}\right)=a$.

Vì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ nên $f'(0^+)=f'(0^-)\Rightarrow b=a\Rightarrow a=-2$.

Vậy $T=a+2b=-6$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2+1$. Xét hàm số $g(x)=f\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)$. Số các nghiệm nguyên của bất phương trình $g'(x)\leq 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)'.f'\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)=\left(f'(x)-x-2\right).f'\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)$

$=\left(x^2-3x\right).\left(\left(f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x\right)^2+1\right)\leq 0 \Leftrightarrow x^2-3x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 3.$

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-2x+3}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y=x-3$.

A. $y=-x+3$ và $y=-x-1$.

B. $y=-x-3$ và $y=-x+1$.

C. $y=x-3$ và $y=x+1$.

D. $y=-x+2$ và $y=-x+1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=x-3$ là:

$$\frac{-2x+3}{x-1}=x-3 \Leftrightarrow -2x+3=(x-1)(x-3)\ (x\neq 1) \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Do đó giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=x-3$ là: $(2;-1),(0;-3)$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(2;-1)$ là: $y=-(x-2)-1=-x+1$.

Phương trình tiếp của (C) tại điểm $(0;-3)$ là: $y=-x-3$.

Câu 15: Cho hàm số $y=x^4-(3m+4)x^2+m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=12; m=\dfrac{-12}{9}$.

B. $m=12$.

C. $m=\dfrac{-12}{9}$.

D. $m=\dfrac{12}{9}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-(3m+4)x^2+m^2=0$ (1)

Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2-(3m+4)t+m^2=0$ (2)

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=5m^2+24m+16>0 \\ P=m^2>0 \\ S=3m+4>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<-4 \vee m>-\dfrac{4}{5} \\ m\neq 0 \\ m>-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{4}{5} \\ m\neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0<t_1<t_2$. Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$. Bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3 \Leftrightarrow -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$ (3)

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=3m+4 & (4) \\ t_1t_2=m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_2 = \dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases}$ (6).

Thay (6) vào (5) ta được $\dfrac{9}{100}(3m+4)^2 = m^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m+4) = 10m \\ 3(3m+4) = -10m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right.$ (thỏa (*))

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 12$; $m = -\dfrac{12}{19}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$. Tính đạo hàm cấp n của hàm số.

A. $y^{(n)} = 2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$

B. $y^{(n)} = 2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$

C. $y^{(n)} = 2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n}} - \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n}}$

D. $y^{(n)} = 2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{x-2} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $y'' = 2.\dfrac{2}{(x-3)^3} - \dfrac{2}{(x-2)^3}$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $y^{(n)} = 2.\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi (C_1), (C_2), (C_3) lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f\left[f(x)\right]$, $y = h(x) = f(x^2+1)$. Biết rằng $f(2) = 5$, $f'(2) = 2$, $g'(2) = 4$. Hãy tính $h'(2)$.

A. $h'(2) = 2$. **B.** $h'(2) = 4$. **C.** $h'(2) = 6$. **D.** $h'(2) = 8$.

Lời giải

Chọn D.

Theo giả thiết ta có: $g'(x) = f'(x).f'\left[f(x)\right] \Rightarrow g'(2) = f'(2).f'\left[f(2)\right]$

$\Rightarrow 4 = 2.f'(5) \Rightarrow f'(5) = 2$.

Mà $h'(x) = 2xf'(x^2+1) \Rightarrow h'(2) = 4f'(5) = 8$

Câu 18: Hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 - mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m \in [1;+\infty)$. **B.** $m \in (1;+\infty)$. **C.** $m \in [0;+\infty)$. **D.** $m \in (0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2x - m$. Để hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ thì $y' \le 0\ \forall x \in (0;+\infty)$ hay $-x^2 + 2x - m \le 0 \Leftrightarrow m \ge -x^2 + 2x$.

Xét hàm số $y=-x^2+2x$ trên $(0;+\infty)$, ta có $y'=-2x+2,\ y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\underset{(0;+\infty)}{\text{Max}}\, y=1$. Do đó $m\ge \underset{(0;+\infty)}{\text{Max}}\, y=1$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

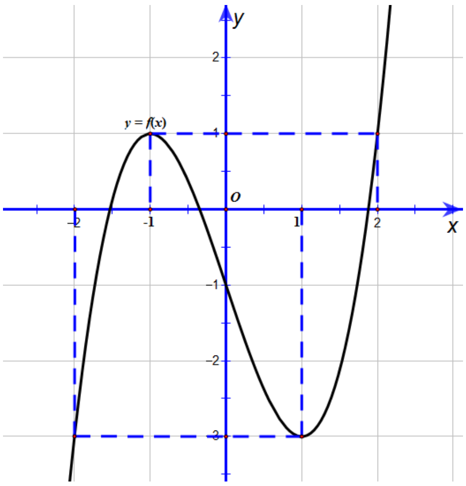
Xét phương trình $2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$. Dựa vào BBT, phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=1$.

Do đó $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận đừng và 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2\sin x$

Ta có bảng biến thiên trên $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
t	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Với $t = 0$, cho ta ba nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Với mỗi $t \in (-2;2)\setminus\{0\}$, cho ta hai nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Với mỗi $t \in \{-2;2\}$, cho ta một nghiệm duy nhất $x \in [-\pi;\pi]$.

Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$

$\Leftrightarrow$ trên đoạn $[-2;2]$, phương trình $f(t) = m$ có đúng một nghiệm duy nhất $t = 0$; hoặc có một nghiệm $t \in \{\pm 2\}$ và một nghiệm thuộc $t \in (-2;2)\setminus\{0\}$.

+ Nếu $t = 0$ là nghiệm $\Rightarrow m = f(0) = -1$. Ta có: $f(t) = -1$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;2]$. (KTM).

+ Nếu $t = -2$ là nghiệm $\Rightarrow m = f(-2) = -3$. Ta có: $f(t) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right.$. (KTM).

+ Nếu $t = 2$ là nghiệm $\Rightarrow m = f(2) = 1$. Ta có: $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$. (KTM).

Vậy $m \in \{-3;1\}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = (1 - x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = -2019.2x.(1 - x^2)^{2018}$

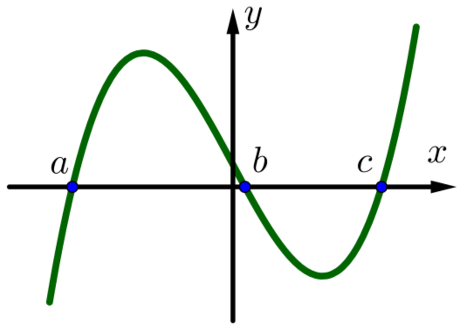
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	-∞		-1		0		1		+∞
y'		+	0	+	0	-	0	-	
y		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có: hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta suy ra phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là $x=a$, $x=b$, $x=c$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do $f(a)>0$ nên để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều điểm nhất có thể thì $f(c)<0$. Khi đó $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm $x=x_1\in(b;c)$ và $x=x_2>c$.

Câu 23: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^4-3x^2-4)^{\sqrt{2}}$?

A. $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số :

$x^4-3x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-2 \vee 2<x$.

Câu 24: Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị của biểu thức $|x_1-x_2|$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$$\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2^m\end{array}\right. \Rightarrow 4+2^m=6 \Leftrightarrow m=1.$$

Khi đó, phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt là $\{4;2\}$ suy ra $|x_1-x_2|=2$.

Câu 25: Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong 3 năm đầu tiên là 6 triệu đồng /tháng. Tính từ ngày đầu tiên làm việc, cứ sau đúng 3 năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng . Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu ?

A. $6.(1,1)^4$ triệu đồng. **B.** $6.(1,1)^6$ triệu đồng.

C. $6.(1,1)^5$ triệu đồng. **D.** $6.(1,1)^{16}$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là số tiền lương một tháng trong 3 năm đầu .

Mức lương tháng đầu tiên nhận được trong năm thứ 4 là :

$T_1 = A + A.0,1 = A(1+0,1) = A.(1,1)$ đồng .

Mức lương tháng đầu tiên nhận được trong năm thứ 7 là :

$T_2 = T_1 + T_1.0,1 = T_1(1+0,1) = T_1.(1,1) = A(1,1)^2$ đồng .

Mức lương tháng đầu tiên nhận được trong năm thứ 10 là :

$T_3 = T_2 + T_2.0,1 = T_2(1+0,1) = T_2.(1,1) = A(1,1)^3$ đồng .

Mức lương tháng đầu tiên nhận được trong năm thứ 13 là :

$T_4 = T_3 + T_3.0,1 = T_3(1+0,1) = T_3.(1,1) = A(1,1)^4$ đồng .

Vậy tháng lương đầu tiên của năm thứ 16 là :

$T_5 = T_4 + T_4.0,1 = T_4.1,1 = A(1,1)^5 = 6.10^6.(1,1)^5$ đồng.

Câu 26: Cho ba số $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo giả thiết ta có $(a+\log_4 3)^2 = (a+\log_2 3)(a+\log_8 3)$.

Suy ra $a^2 + 2a\log_4 3 + (\log_4 3)^2 = a^2 + a(\log_2 3 + \log_8 3) + \log_2 3.\log_8 3$.

$\Leftrightarrow a\log_2 3 + \frac{1}{4}(\log_2 3)^2 = a\frac{4}{3}\log_2 3 + \frac{1}{3}(\log_2 3)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\log_2 3$.

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}\log_2 3$.

Vậy $a+\log_2 3 = \frac{3}{4}\log_2 3$; $a+\log_4 3 = \frac{1}{4}\log_2 3$. Suy ra công bội của cấp số nhân bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 27: Tích các nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ là

A. -12. **B.** -18. **C.** 36. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2>0 \\ (x-5)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 5 \end{cases}$

Khi đó $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2) + \log_2|x-5| - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+2)|x-5|\right] = 3$

$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8$

TH1: Với $x \in (-2;5)$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x+2)(5-x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} (tm) \\ x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} (tm) \end{array}\right.$

TH2: Với $x \in (5;+\infty)$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x+2)(x-5) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 (loai) \\ x = 6 (tm) \end{array}\right.$

Suy ra tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; 6\right\} \Rightarrow$ tích các nghiệm là -12.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	1	$+$	2019	$-$	

Bất phương trình $f(x) > e^{\cos x} + m$ có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \le f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 1$. **B.** $m < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 1$. **C.** $m \ge f(0) - e$. **D.** $m \le f(0) - e$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^{\cos x}$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$g'(x) = f'(x) + \sin x.e^{\cos x}$.

Trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $0 < \sin x < 1$ nên $g'(x) > 0$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} g(x) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 1$.

$f(x) > e^{\cos x} + m \Leftrightarrow m < f(x) - e^{\cos x} \Leftrightarrow m < g(x)$ (*)

Bất phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m < \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} g(x) \Leftrightarrow m < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \log x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{2|x-m|+1}\right) + f(x^2 - 2x + 2) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D=(0;+\infty)$. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 10}+3^x\ln 3+\dfrac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}.\ln 3>0,\forall x>0$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

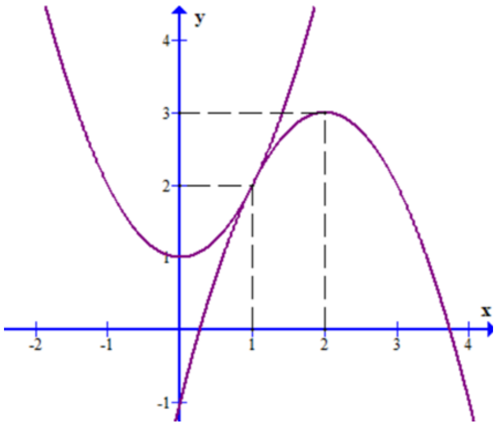
Nhận xét: Nếu $v\in(0;+\infty)$ thì $f\left(\dfrac{1}{v}\right)=\log\dfrac{1}{v}+3^{\frac{1}{v}}-3^v=-\log v-3^v+3^{\frac{1}{v}}=-f(v)$. Ngược lại nếu $f(u)=-f(v)$ thì $u=\dfrac{1}{v}$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{2|x-m|+1}\right)+f\left(x^2-2x+2\right)=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2|x-m|+1}\right)=-f\left(x^2-2x+2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2|x-m|+1}=\frac{1}{x^2-2x+2}\Leftrightarrow 2|x-m|+1=x^2-2x+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2m=x^2-2x+1\\ 2x-2m=-x^2+2x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2m=x^2-2x+1\\ 2x-2m=-x^2+2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1=f(x)\\ 2m=x^2+1=g(x)\end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên cùng hệ trục ta được:



Để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm thì đường thẳng $y=2m$ cắt hai đồ thị trên tại đúng 3 điểm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m=2\\ 2m=3\\ 2m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{3}{2}\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow \sum m^2=1+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{2}.$$

Câu 30: Hàm số $y=\left(x^2-x+1\right)e^x$ có đạp hàm

A. $y'=(2x-1)e^x$. **B.** $y'=\left(x^2-x\right)e^x$. **C.** $y'=\left(x^2+x\right)e^x$. **D.** $y'=\left(x^2+1\right)e^x$.

Lời giải

Chọn C

$y=\left(x^2-x+1\right)e^x\Rightarrow y'=(2x-1)e^x+\left(x^2-x+1\right)e^x=\left(x^2+x\right)e^x$.

Câu 31: Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{\log^2_{\sqrt{2}}x}+x^{2\log_2 x}-20\le 0$

A. $0<x\le\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}\le x\le 2$

C. $\frac{1}{3} \le x \le 2$

D. $\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$

$2^{\log_{\sqrt{2}}^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0 \Leftrightarrow 2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0 \Leftrightarrow 16^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Đặt $\log_2 x = t \Rightarrow x = 2^t$

BPT $\Leftrightarrow 16^{t^2} + \left(2^t\right)^{2t} - 20 \le 0 \Leftrightarrow 16^{t^2} + 4^{t^2} - 20 \le 0$

Đặt $4^{t^2} = u, u \ge 1$ (vì $u = 4^{t^2} \ge 4^0 = 1$)

BPT $\Leftrightarrow u^2 + u - 20 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le u \le 4$

Kết hợp với $u \ge 1 \Rightarrow 1 \le u \le 4$

$\Rightarrow 1 \le 4^{t^2} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le t^2 \le 1 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \log_2 x \le 1 \Leftrightarrow 2^{-1} \le x \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$

Câu 32: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$

A. $S_{\min} = 30$.

B. $S_{\min} = 25$.

C. $S_{\min} = 33$.

D. $S_{\min} = 17$.

Lời giải

Chọn. A.

Điều kiện để phương trình có nghĩa và có nghiệm là $x > 0$ và $b^2 - 20ab > 0$

+) Xét phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$.

Đặt $t = \ln x$. Khi đó pt $\Leftrightarrow at^2 + bt + 5 = 0$

Phương trình có nghiệm $t_1 = \ln x_1, t_2 = \ln x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo định lí Viét ta có:

$t_1 + t_2 = \ln x_1x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1x_2 = e^{-\frac{b}{a}}$.

+) Xét phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$

Đặt $u = \log x$. Khi đó: Pt $\Leftrightarrow 5u^2 + bu + a = 0$.

Giả sử $u_1 = \ln x_3, u_2 = \ln x_4$ là hai nghiệm của phương trình, theo định lí Viets, ta có

$u_1 + u_2 = \log\left(x_3x_4\right) = -\frac{b}{5} \Leftrightarrow x_3x_4 = 10^{-\frac{b}{5}}$.

Do đó $x_1x_2 > x_3x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > \ln 10^{-\frac{b}{5}}$

$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{a}\ln 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{\ln 10}{5} \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10}$

Theo giả thiết: $a \in N^* \Rightarrow a \ge 3$

$b^2 - 20a > 0, b \in N^* \Rightarrow b \ge 8$

Vậy ta có

$S = 2a + 3b \ge 2.3 + 3.8 = 30 \Rightarrow S_{\min} = 30$.

Câu 33: Khối đa diện nào sau đây có các mặt **không phải** là tam giác đều?

A. Khối bát diện đều.

B. Khối mười hai mặt đều.

C. Khối tứ diện đều.

D. Khối hai mươi mặt đều.

Lời giải

Chọn B

Khối mười hai mặt đều có các mặt là ngũ giác đều.

Câu 34: Mệnh đề nào sao đây đúng?

A. Hình bát diện đều có 8 đỉnh, 12 cạnh và 6 mặt.

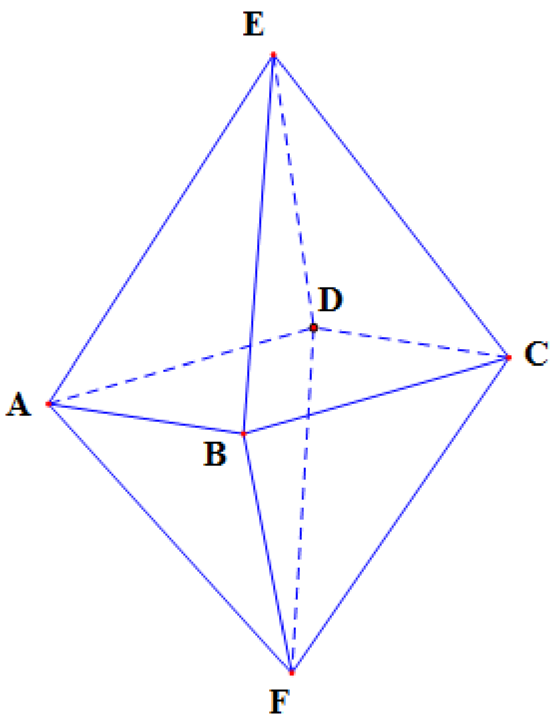
B. Hình bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

C. Hình bát diện đều có 6 đỉnh, 8 cạnh và 8 mặt.

D. Hình bát diện đều có 8 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

Lời giải

Chọn B



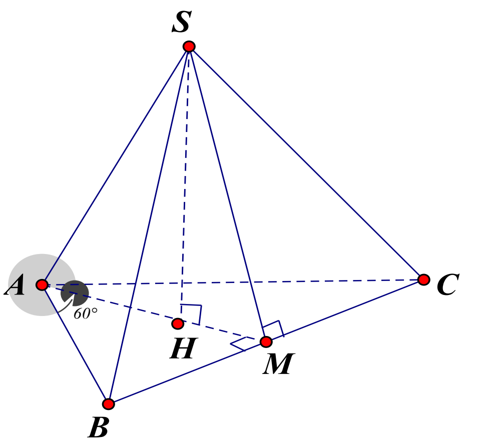
Hình bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^0$ và $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = SB = SC = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống đáy. Vì $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow H \in AM$.

Xét tam giác vuông ABM : $AB = AC = \frac{BM}{\sin 60^0} = a,\ AM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác $ABC : S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông $SBM : SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

$p = \frac{SA + AM + SM}{2} = \frac{5+\sqrt{13}}{4}a$. Diện tích tam giác SAM :

$S_{SAM} = \sqrt{p(p-SA)(p-AM)(p-SM)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} SH.\frac{a}{2} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}.$

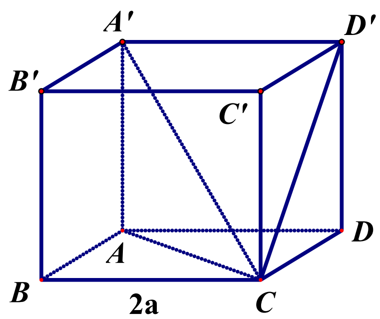
Thể tích của khối chóp $S.ABC : V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$..

Câu 36: Tính thể tích V của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ biết độ dài cạnh đáy bằng $2a$ đồng thời góc tạo bởi $A'C$ và đáy $(ABCD)$ bằng $30°$.

A. $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = 24\sqrt{6}a^3$. **C.** $V = 8\sqrt{6}a^3$. **D.** $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có góc tạo bởi $A'C$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'CA} = 30°$,

và $AC = 2\sqrt{2}a$,

suy ra và $AA' = A'C \tan \widehat{A'CA} = 30° = a.2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.a$.

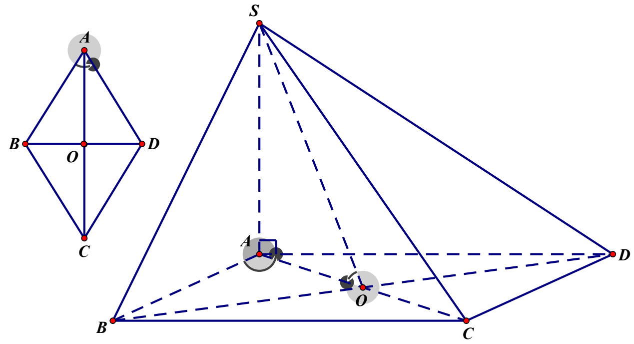
$\Rightarrow V = (2a)^2.\frac{2\sqrt{6}}{3}.a = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Góc A bằng 60^0, O là tâm hình thoi, SA vuông góc với đáy. Góc giữa SO và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $3\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có: $\left(SO;\left(ABC\text{D}\right)\right)=\left(SO;AO\right)=\widehat{SOA}=45^0\Rightarrow \Delta SAO$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow SO=AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔABD đều) .

$S_{ABCD}=2S_{\Delta ABD}=2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

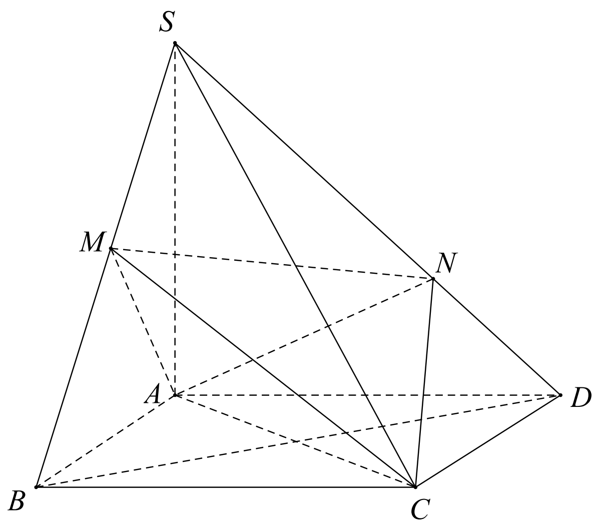
$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\dfrac{1}{36}a^3$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\dfrac{1}{8}a^3$. **D.** $V=\dfrac{1}{12}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{ACMN}=V_{S.ABCD}-\left(V_{S.AMN}+V_{S.CMN}+V_{M.ABC}+V_{N.ACD}\right)$.

Với $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a^3$

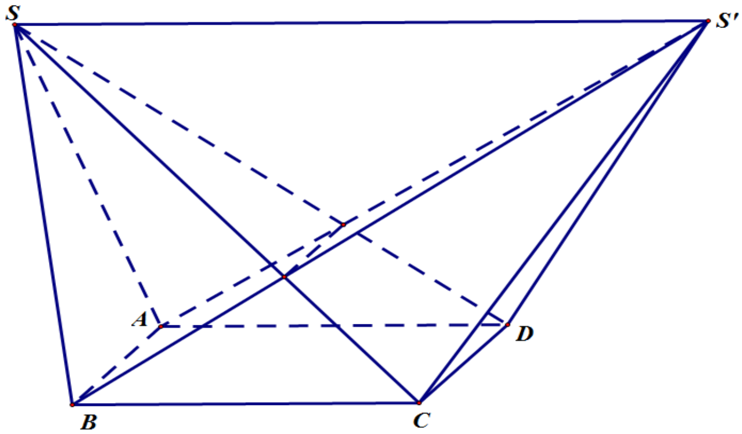
$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$, mà $V_{S.ABD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{6}$ suy ra $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{18}a^3$.

Tương tự $V_{S.CMN} = \dfrac{1}{18}a^3$

Lại có $V_{M.ABC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{12}a^3$; $V_{N.ACD} = \dfrac{1}{3}V_{S.ACD} = \dfrac{1}{18}a^3$.

Vậy $V_{ACMN} = \dfrac{1}{3}a^3 - \left(\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18}\right)a^3 = \dfrac{1}{12}a^3$.

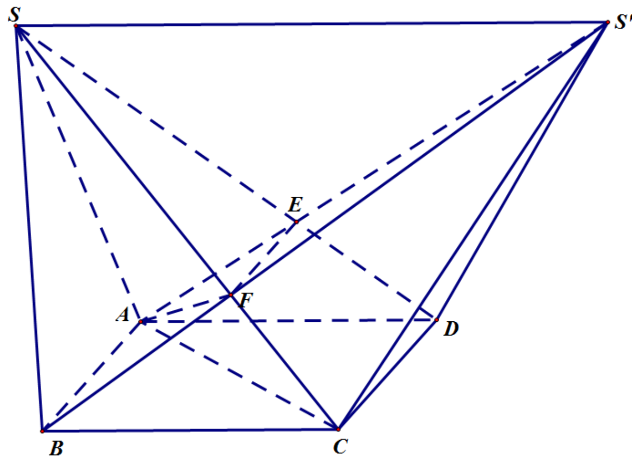
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và thể tích $V = 270$. Lấy điểm S' trong không gian sao cho $\overrightarrow{SS'} = -2\overrightarrow{CB}$. Tính thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$.



A. 120. **B.** 150. **C.** 180. **D.** 90.

Lời giải

Chọn A.



Gọi $E = S'A \cap SD$, $F = S'B \cap SC$. Phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là đa diện $ABCDEF$.

Ta có: $V_{ABCDEF} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABFE}$.

$SS'//BC \Rightarrow \dfrac{SF}{FC} = \dfrac{SS'}{BC} = 2$.

$SS'//AD \Rightarrow \dfrac{SE}{ED} = \dfrac{SS'}{AD} = 2$.

$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.ABF}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABF} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

$$\frac{V_{S.AFE}}{V_{S.ACD}} = \frac{SF}{SC}.\frac{SE}{SD} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AFE} = \frac{4}{9}V_{S.ACD} = \frac{2}{9}V_{S.ABCD}.$$

Suy ra: $V_{S.ABFE} = V_{S.ABF} + V_{S.AFE} = \frac{5}{9}V_{S.ABCD} = 150$.

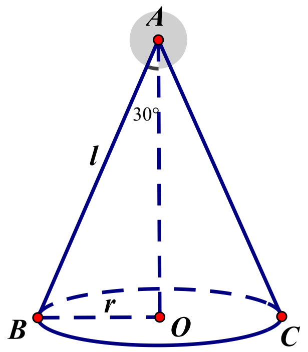
Vậy: $V_{ABCDEF} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABFE} = 120$.

Câu 40: Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$

A. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = 3\pi a^3$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải

Chọn B.



Tam giác ABC đều cạnh l, bán kính $r = \frac{l}{2}$, chiều cao $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ thể tích khối nón là

$S_{xq} = \pi rl = 6\pi a^2 \Rightarrow rl = 6a^2 \Rightarrow l^2 = 12a^2$.

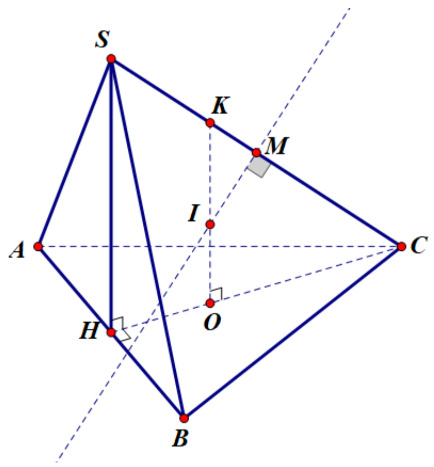
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{l^2}{4}.\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{24}\pi l^2.l.\sqrt{3} = \frac{1}{24}\pi.12a^2.2a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3\pi a^3.$$

Câu 41: Hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB.

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB);SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Qua O dựng đường thẳng song song với SH, cắt SC tại K. Khi đó đường thẳng OK là trục đường tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp $S.ABC$.
Gọi M là trung điểm của BC. Dựng mặt phẳng trung trực của BC, mặt phẳng này cắt đường thẳng OK tại I. Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Do $OK//SH$ nên:

- $\frac{OK}{SH}=\frac{CO}{CH}=\frac{2}{3}\Rightarrow OK=\frac{2}{3}SH=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\frac{CK}{SC}=\frac{CO}{CH}=\frac{2}{3}\Rightarrow CK=\frac{2}{3}SC\Rightarrow CM+MK=\frac{2}{3}SC\Rightarrow\frac{1}{2}SC+MK=\frac{2}{3}SC\Rightarrow MK=\frac{1}{6}SC$

$\Rightarrow MK=\frac{1}{6}\sqrt{SH^2+CH^2}=\frac{\sqrt{6}}{12}$

Dễ thấy ΔSHC vuông cân tại H $\Rightarrow\widehat{OKC}=\widehat{HSC}=45^\circ\Rightarrow\Delta IMK$ vuông cân tại M $\Rightarrow IK=\sqrt{2}MK=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $OI=OK-IK=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow R=IC=\sqrt{OI^2+OC^2}=\sqrt{OI^2+OK^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Câu 42: Cho mặt cầu (S) tâm O có diện tích bằng $400\pi\ cm^2$. Mặt phẳng (P) cách tâm O một khoảng bằng $6cm$ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=7cm$. **B.** $r=10cm$. **C.** $r=40cm$. **D.** $r=8cm$.

Lời giải

Chọn D

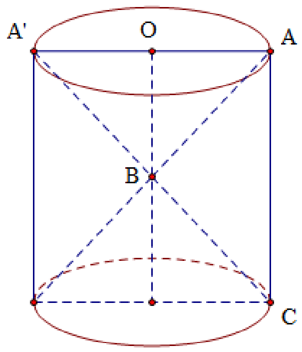
Gọi R là bán kính mặt cầu , ta có diện tích mặt cầu: $S=4\pi R^2=400\pi\Leftrightarrow R=10cm$
Mặt phẳng (P) cách tâm O một khoảng bằng $6cm$ và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn bán kính r, ta có: $r^2=R^2-d^2(O,(P))=10^2-6^2=64\Leftrightarrow r=8cm$.

Câu 43: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB=BC=a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn C



$AC = 2a$; $OA = OB = a$; $O'B = O'C = a$.

Thể tích khối trụ tròn xoay sinh ra khi cho hình chữ nhật $AOO'C$ quay quanh OO' là $V_T = \pi.OA^2.AC = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Thể tích khối nón đỉnh B, đáy là đường tròn tâm O là $V_N = \frac{1}{3}\pi.OA^2.OB = \frac{1}{3}\pi a^2.a = \frac{1}{3}\pi a^3$.

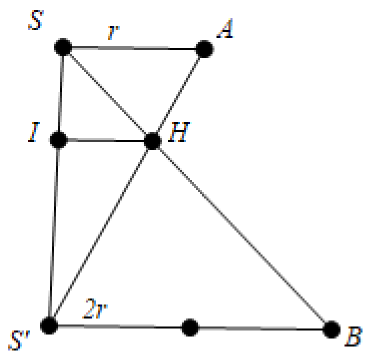
Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_T - 2V_N = 2\pi a^3 - 2.\frac{\pi a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 44: Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\frac{\pi r^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có phần chung của hai khối nón đã cho gồm hai hình nón (H_1) là hình nón đỉnh S bán kính IH và (H_2) là hình nón đỉnh S' bán kính IH

$\Delta SAH \sim \Delta BS'H \Rightarrow \frac{SH}{HB} = \frac{SA}{S'B} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{1}{3}$.

$\Delta SIH \sim \Delta SS'B \Rightarrow \frac{IH}{S'B} = \frac{SH}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow IH = \frac{2r}{3}$.

Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

$$V = \frac{1}{3}\pi IH^2.SI + \frac{1}{3}\pi IH^2.S'I = \frac{1}{3}\pi IH^2.(SI + S'I) = \frac{1}{3}\pi IH^2.SS' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2r}{3}\right)^2.3r = \frac{4\pi r^3}{9}.$$

Câu 45: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+4}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ là

A. $3-\dfrac{4}{x^2}+C$. **B.** $3x^2+4\ln x+C$ **C.** $\dfrac{3x^2}{2}+4\ln x+C$. **D.** $x^3+4nx+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\dfrac{3x^2+4}{x}\mathrm{d}x=\int\left(3x+\dfrac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+4\ln\left|x\right|+C=\dfrac{3x^2}{2}+4\ln x+C$.

Câu 46: Xét $\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $u=2-\sqrt{x}$ thì $\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int\limits_1^4\dfrac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **B.** $2\int\limits_1^2\dfrac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **C.** $2\int\limits_0^1\dfrac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$. **D.** $-2\int\limits_0^1\dfrac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết: $u=2-\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}=2-u\Rightarrow x=\left(2-u\right)^2$

Khi đó: $\mathrm{d}x=2\left(u-2\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x=1\mapsto u=1$, $x=4\mapsto u=0$.

Ta có: $I=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_1^0\dfrac{f\left(u\right).2.\left(u-2\right)}{\left(2-u\right)^3}\mathrm{d}u=2\int\limits_0^1\dfrac{f\left(u\right)}{\left(u-2\right)^2}\mathrm{d}u$.

Câu 47: Cho $\int\limits_1^2\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln a+b)$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $ab+a+b$ bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Có $\int\limits_1^2\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}(x+\ln x)}{x+\ln x}=\ln\left(x+\ln x\right)\Big|_1^2=\ln(\ln 2+2)$

Vậy $a=b=2\Rightarrow ab+a+b=8$.

Câu 48: Cho $\int\limits_0^{\ln 3}\dfrac{e^x}{1+\sqrt{e^x+1}}dx=a-\sqrt{b}+\ln\left(\dfrac{c+\sqrt{d}}{9}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $a+b+c+d$ bằng

A. 21. **B.** 15. **C.** 23. **D.** 27.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow e^x=t^2-1\Rightarrow e^xdx=2tdt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\ln 3\Rightarrow t=2$. Khi đó

$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\dfrac{(2tdt)}{1+t}=\int\limits_{\sqrt{2}}^2(2-\dfrac{2}{t+1})dt=(2t-2\ln|t+1|)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=4-\sqrt{8}+\ln(\dfrac{3+\sqrt{8}}{9})$.

Vậy $a=4,b=8,c=3,d=8$ và $a+b+c+d=23$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=4, f'(0)=-2$ $f''(x)=x(2x^2+1)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7909}{2520}$ **B.** $\frac{7211}{2520}$ **C.** $\frac{12949}{2520}$ **D.** $\frac{5389}{2520}$

Lời giải

Chọn A

Tích phân từng phần, ta có:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)dx$$

$$=f(0)-\int_0^1(x-1)f'(x)dx=f(0)-\int_0^1 f'(x)d\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=f(0)-\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)f'(x)\Big|_0^1+\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)f''(x)dx$$

$$=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)x(2x^2+1)^3dx$$

$$=4+\frac{1}{2}\times(-2)+\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)x(2x^2+1)^3dx=\frac{7909}{2520}$$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=2$

$$I=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t$$

Đặt $\begin{cases}u=t\\ dv=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=f(t)\end{cases}$

$$I=\frac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}\left(2f(2)-0f(0)-4\right)=7$$