

Câu 1. (2,5 điểm)

a. Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$.

b. Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

c. Tính giá trị của biểu thức: $N = xy^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$ tại: $x = -1; y = -1; z = -1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

b. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017|$.

b. Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này?

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK.

Câu 5. (1,0 điểm)

Có sáu túi lần lượt chứa 18, 19, 21, 23, 25 và 34 bóng. Một túi chỉ chứa bóng đỏ trong khi năm túi kia chỉ chứa bóng xanh. Bạn Toán lấy ba túi, bạn Học lấy hai túi. Túi còn lại chứa bóng đỏ. Biết lúc này bạn Toán có số bóng xanh gấp đôi số bóng xanh của bạn Học. Tìm số bóng đỏ trong túi còn lại.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh:SBD:

Ghi chú:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày những ý cơ bản và một cách giải, nếu học sinh có cách giải khác mà đúng thì Giám khảo vận dụng thang điểm để cho điểm nhưng không vượt quá thang điểm của câu.
- Câu 4 học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm.
- Tổng điểm toàn bài thi của thí sinh bằng tổng điểm của các câu không làm tròn.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM					
1a. 1,0 điểm	$\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$ $\frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015}$ $x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} = -2016$ <p>Vậy $x = -2016$</p>	0,25 0,25 0,25 0,25					
1b. 1,0 điểm	$M = \frac{3n - 1}{n - 1}$ có giá trị là số nguyên $\Rightarrow 3n - 1 : n - 1$ $\Rightarrow 3(n - 1) + 2 : n - 1 \Rightarrow 2 : n - 1 \Rightarrow n - 1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\}$ Ta có bảng <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin: 10px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{n - 1}{n}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{-1}{0}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{-2}{-1}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{2}{3}$</td> </tr> </table> <p>Thử lại ta có $n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.</p>	$\frac{n - 1}{n}$	$\frac{-1}{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{-1}$	$\frac{2}{3}$	0,25 0,25 0,25 0,25
$\frac{n - 1}{n}$	$\frac{-1}{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{-1}$	$\frac{2}{3}$			
1c. 0,5 điểm	Ta có : $N = xyz \cdot yz^2 + x^2 y^2 z^2 \cdot yz^2 + x^3 y^3 z^3 \cdot yz^2 + \dots + x^{2014} y^{2014} z^{2014} \cdot yz^2$ Thay $y = 1; z = -1$ ta được: $N = -xyz - x^2 y^2 z^2 - x^3 y^3 z^3 - \dots - x^{2014} y^{2014} z^{2014}$ $= -(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014}$ Thay $xyz = -1$ được: $N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$ Vậy $N = 0$.	0,25 0,25					
2a. 1,0 điểm	$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$ $\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$ $= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$ $\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$	0,5 0,25 0,25					

	$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c}$ (2); Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$	
2b. 1,0 điểm	<p>Nhận xét: - Với $x \geq 0$ thì $x + x = 2x$ - Với $x < 0$ thì $x + x = 0$.</p> <p>Do đó $x + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Áp dụng nhận xét trên thì $n - 2016 + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$.</p> <p>Khi đó $n - 2016 + n - 2016 = 2016$</p> <p>+ Nếu $n < 2016$, ta có $-(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0 = 2016$ (loại) + Nếu $n \geq 2016$, ta có $2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n - 2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)</p> <p>Vậy $(m; n) = (0; 3024)$</p>	0,25 0,25 0,25 0,25
3a. 1điểm	<p>$P = x - 2015 + 2016 - x + x - 2017 = (x - 2015 + 2017 - x) + x - 2016$</p> <p>Ta có: $x - 2015 + 2017 - x \geq x - 2015 + 2017 - x = 2$. Dấu “=” xảy ra khi: $2015 \leq x \leq 2017$ (1)</p> <p>Lại có: $x - 2016 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$ (2).</p> <p>Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$</p>	0,25 0,25 0,25
3b. 0,5 điểm	<p>Nhận xét : Bốn số phải có cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1.</p> <p>Từ đó ta có các số 1, 7, 13 và 19. Tổng của chúng là : $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.</p>	0,25 0,25
4		
4a. 1,0 điểm	Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn)	1,0

4b. 1,0 điểm	<p>Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn) $\Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)</p> <p>+) Chứng minh: $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$</p> <p>BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)</p>	0,25 0,25 0,25 0,25
4c. 0,5 điểm	<p>Vẽ $DP \perp BC$ tại P, $KQ \perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC</p> <p>+) Chứng minh : $BD = FM = EH = CK$</p> <p>+) Chứng minh : $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch-gn) $\Rightarrow DP = KQ$(cạnh tương ứng)</p> <p>+) Chứng minh : $\widehat{IDP} = \widehat{IKQ} \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI$ (g-c-g) $\Rightarrow ID = IK$(đpcm)</p>	0,25 0,25
5. 1,0 điểm	<p>Tổng số bóng trong 6 túi là : $18+19+21+23+25+34=140$</p> <p>Vì số bóng của Toán gấp hai lần số bóng của học nên tổng số bóng của hai bạn là bội của 3. Ta có : 140 chia 3 bằng 46 dư 2. Do đó số bóng đỏ cũng là số chia 3 dư 2.</p> <p>Trong sáu số đã cho chỉ có 23 chia 3 dư 2, đó chính là số bóng đỏ trong túi còn lại. Từ đó ta tìm được số bóng của Toán là : $18+21=39$. Số bóng của học là : $19+25+34=78$.</p>	0,25 0,25 0,5