TRƯỜNG THCS CAO XUÂN HUY

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG VÒNG 2 – NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: Toán – Lớp 8 – *Thời gian làm bài: 120 phút*

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho x, y là các số hữu tỷ khác 1 thỏa mãn: $\frac{1-2x}{1-x}+\frac{1-2y}{1-y}=1$.

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

2) Cho đa thức $f(x)$. Tìm số dư của phép chia $f(x)$ cho $(x-1)(x+2)$, biết rằng $f(x)$ chia $x-1$ dư 7 và $f(x)$ chia $x+2$ dư 1.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Tìm hai số nguyên dương x, y thỏa mãn: $(x+y)^4 = 40x+1$.

2) Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{y^2+y}+\frac{1}{z^2+z}$.

2) Cho m,n là hai số nguyên dương lẻ thỏa mãn $\begin{cases} m^2+2 \vdots n \\ n^2+2 \vdots m \end{cases}$.

Chứng minh: $m^2+n^2+2 \vdots 4mn$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho tam ABC vuông tại A, có đường cao AH và trung tuyến BN. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BN cắt BN và BC lần lượt tại K và M.

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{4}{AC^2}$.

b) $\widehat{BKH}=\widehat{BAH}$

c) $\frac{2}{MB}=\frac{1}{BH}+\frac{1}{BC}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho hình vuông có cạnh bằng 2023cm. Bên trong hình vuông, người ta lấy 2022 điểm phân biệt sao cho trong 2026 điểm (tính cả 4 đỉnh hình vuông) không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng, tồn tại 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 2026 điểm đã cho (tính cả 4 đỉnh hình vuông) có diện tích không lớn hơn $\frac{2023}{2}$ cm^2.

------*Hết*------

ĐÁP ÁN HSG TRƯỜNG VÒNG 2

Câu 1.

a) Ta có:

$$\frac{1-2x}{1-x}+\frac{1-2y}{1-y}=1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y)+(1-2y)(1-x)=(1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy=1-x-y+xy$$

$$\Leftrightarrow 3xy=2x+2y-1$$

$$\Rightarrow M=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$$

$$=(x+y)^2-(2x+2y-1)=(x+y)^2-2(x+y)+1=(x+y-1)^2$$

Mà x, y là các số hữu tỷ khác 1

$\Rightarrow M=x^2+y^2-xy$ là bình phương của một số hữu tỷ (đpcm).

b) Gọi dư của phép chia $f(x)$ cho $(x-1)(x+2)$ là $ax+b.$

Ta có: $f(x)=p(x).(x-1)+7=q(x).(x+2)+1=k(x)(x-1)(x+2)+ax+b.$

Thay $x=1, x=-2$ được: $\begin{cases} a+b=7 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=6 \\ b=7-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}.$

Dư cần tìm là: $2x+5.$

Câu 2.

1) Vì $x; y \in N^* \Rightarrow (x+y)^4=40x+1<40x+40y=40(x+y) \Rightarrow (x+y)^3<40 \Rightarrow x+y<4$

Do đó: $2 \le x+y<4$

Mặt khác: $40x+1$ là số lẻ nên $(x+y)^4$ là số lẻ $\Rightarrow x+y$ là số lẻ

Ta có: $2 \le x+y<4$, $x+y$ là số lẻ $\Rightarrow x+y=3$

Từ đó: $(x; y) \in \{(2;1);(1;2)\}$

Thử lại chỉ có cặp số $(x; y)=(2;1)$ thỏa mãn bài toán .

Vậy $x=2; y=1.$

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)9(x+1)^2(3x+8)=-144$

$\Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t \Rightarrow 3x-2=t-5,\ 3x+8=t+5,$ ta có phương trình:

$(t-5)t^2(t+5)=-144 \Leftrightarrow (t^2-25)t^2=-144$

$\Leftrightarrow t^4-25t^2+144=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t^2-16)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=9 \\ t^2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 3 \\ t=\pm 4 \end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow 3x+3=3 \Leftrightarrow x=0$

Với $t=-3 \Rightarrow 3x+3=-3 \Leftrightarrow x=-2$

Với $t=4\Rightarrow 3x+3=4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Với $t=-4\Rightarrow 3x+3=-4\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;-2;\dfrac{1}{3};\dfrac{-7}{3}\right\}$.

Câu 3

a) $P=\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{y^2+y}+\dfrac{1}{z^2+z}=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{y(y+1)}+\dfrac{1}{z(z+1)}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$$

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$ và $\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ với a,b,c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.$

Ta có $\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{x}+1\right);\dfrac{1}{y+1}\leq\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{y}+1\right);\dfrac{1}{z+1}\leq\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{z}+1\right)$

Bởi vậy $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}\right)\geq\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{1}{y}+1+\dfrac{1}{z}+1\right)$

$$=\frac{3}{4}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}.\frac{9}{x+y+z}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

Vậy Min P=$\dfrac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

b) +) Vì m,n là hai số nguyên dương lẻ nên ta đặt $m=2a+1,\ n=2b+1\ \left(a,b\in\mathbb{N}\right)$.

Khi đó ta có: $m^2+n^2+2=4\left(a^2+b^2\right)+4\left(a+b\right)+4\,\vdots\,4$ (1)

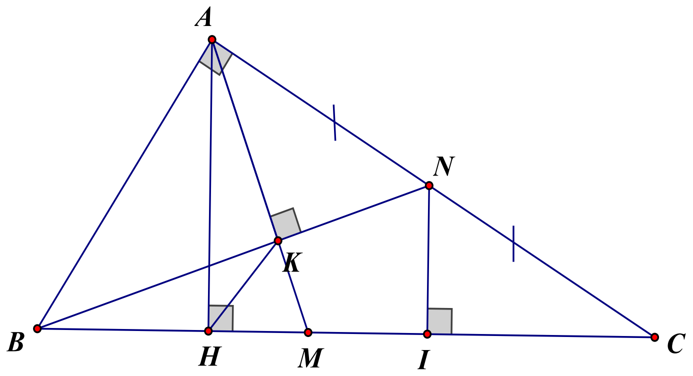
+) Vì $\begin{cases}m^2+2\,\vdots\,n\\ n^2+2\,\vdots\,m\end{cases}$ nên $\left(m^2+2\right)\left(n^2+2\right)\vdots\,mn\ \Rightarrow m^2n^2+2\left(m^2+n^2+2\right)\vdots\,mn\ \Rightarrow 2\left(m^2+n^2+2\right)\vdots\,mn$

Vì m,n lẻ nên $\left(2,mn\right)=1$.

Do đó $m^2+n^2+2\,\vdots\,mn$ (2)

Từ (1), (2) và $\left(4,mn\right)=1$ nên suy ra $m^2+n^2+2\,\vdots\,4mn$.

Câu 4.



a) Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AN^2}$. mà AC = 2.AN

$\Rightarrow \frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{4}{AC^2}$.

b) Chứng minh được $\Delta BKA \backsim \Delta BAN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{BK}=\frac{BN}{AB} \Rightarrow AB^2 = BK.BN$ (1)

Chứng minh được $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BK.BN = BH.BC \Rightarrow \frac{BH}{BK}=\frac{BN}{BC}$

Xét ΔBHK và ΔBNC, có: $\widehat{NBC}$ chung và $\frac{BH}{BK}=\frac{BN}{BC}$

Suy ra $\Delta BHK \backsim \Delta BNC \Rightarrow \widehat{BKH}=\widehat{ACB}$ mà $\widehat{BAH}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BKH}=\widehat{BAH}$

c) Kẻ $NI \perp BC$ tại I, ta có $AH//NI$ (vì cùng vuông góc với BC)

Vì N là trung điểm của AC nên I là trung điểm của HC

Chứng minh được $\Delta BKM \backsim \Delta BIN$ (g.g) suy ra được $MB.BI = BK.BN(3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có $BM.BI = BH.BC \Rightarrow BM.2BI = 2BH.BC$

$\Rightarrow BM.(BH + BC) = 2BH.BC \Rightarrow \frac{2}{BM}=\frac{1}{BH}+\frac{1}{BC}$

Câu 5.

Số tam giác được tạo thành: 4 + 2.2021 = 4046

Mà tổng diện tích của 4046 tam giác này bằng 2023^2 cm^2

Nên tồn tại 1 tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{2023^2}{4046}=\frac{2023}{2}cm^2$