

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề thi có 01 trang

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$

2. Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm x biết: $x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+4043} = 4043$

2. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh rằng x là số hữu tỉ.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên x và y sao cho $x^4 + y^3 = xy^3 + 1$

2. Cho S là tập hợp các số nguyên dương n có dạng $n = x^2 + 3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $A \in S$ và A là số chẵn thì A chia hết cho 4 và $\frac{A}{4} \in S$.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Vẽ NH vuông góc với CM tại H, HE vuông góc với AB tại E. Trên tia NH lấy điểm K sao cho $NK = CM$.

a) Chứng minh tứ giác ABKC là hình vuông

b) Chứng minh HM là tia phân giác của góc BHE

c) Giả sử $\widehat{AHC} = 135^\circ$. Chứng minh $2HA^2 = HB^2 - HC^2$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm GTNN của

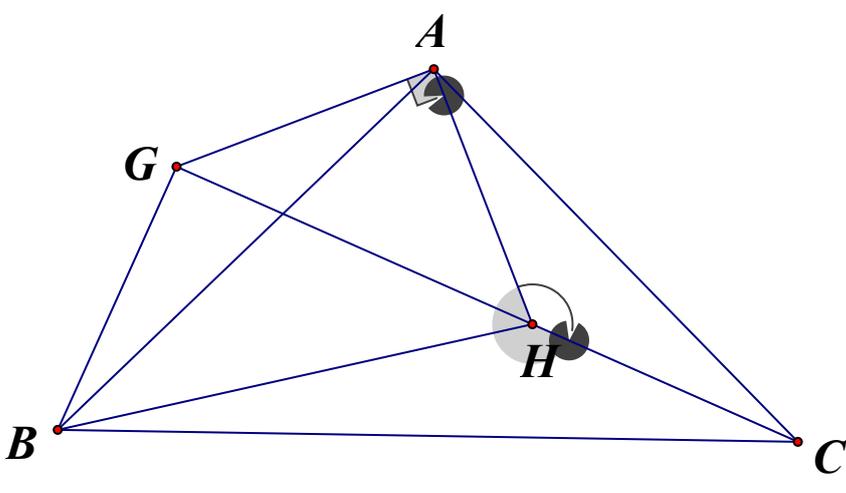
$$P = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2}$$

-----**Hết**-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Hướng dẫn giải	
Câu 1		4.0điểm
1.a 2.0điểm	Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$	
	Ta có $P = \frac{a^2(1+a) - b^2(1-b) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)} = \frac{a^3 + a^2 - b^2 + b^3 - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)}$	0.5
	$= \frac{(a^3 + b^3) + (a^2 - b^2) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a-b)(a+b) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)}$	0.5
	$= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + a - b - a^2b^2)}{(a+b)(1-b)(1+a)} = \frac{(a^2 - a^2b^2) + (a - ab) + (b^2 - b)}{(1-b)(1+a)}$	0.5
	$= \frac{a^2(1-b)(1+b) + a(1-b) - b(1-b)}{(1-b)(1+a)} = \frac{(1-b)(a^2b + a^2 + a - b)}{(1-b)(1+a)}$	0.5
	$= \frac{(a^2b + a^2 + a - b)}{1+a} = \frac{(a^2 + a) + (a^2b - b)}{1+a} = \frac{a(a+1) + b(a+1)(a-1)}{1+a}$	
$= \frac{(a+1)(a+ab-b)}{(1+a)} = a + ab - b$		
2. Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0$	2.0 điểm	
1.b 2.0điểm	Nếu $x + y + z = 0$ thì $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \neq 1 \Rightarrow x + y + z \neq 0$	0.5
	Ta có: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$	
	Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \neq 1 \Rightarrow x + y + z \neq 0$	0.25
	$\Rightarrow (x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) = x+y+z$	0.75
$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + z + \frac{y^2}{z+x} + y + \frac{z^2}{x+y} + x = x+y+z$		
$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0$	0.5	
Câu 2		4.0điểm
1 2.0điểm	1. Tìm x biết: $x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+3+\dots+4043} = 4043$	2.0 điểm

	$x + \frac{2x}{2.3} + \frac{2x}{3.4} + \dots + \frac{2x}{4043.4044} = 4043$	0,5
	Ta có: $2x \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{4043.4044} \right) = 4041$	0,5
	$2x \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4043} - \frac{1}{4044} \right) = 4043$	0,25
	$2x \cdot \left(1 - \frac{1}{4044} \right) = 4043$ $x \cdot \frac{4043}{2022} = 4043$ $x = 2022$	0,5
	Vậy $x = 2022$	0,25
2b 2.0điểm	2. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.	2.0 điểm
	Ta có $x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$ suy ra $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q}$.	0,5
	Mặt khác $x^3 \in \mathbb{Q}$ suy ra $\frac{8}{x^3} \in \mathbb{Q}$ suy ra $x^3 - \frac{8}{x^3} = \left(x - \frac{2}{x}\right) \left(x^2 + 2 + \frac{4}{x^2}\right) \in \mathbb{Q}$	0,75
	Do $x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 2 \in \mathbb{Q}$ nên suy ra $x - \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$.	0,75
	Vậy $2x = \left(x + \frac{2}{x}\right) + \left(x - \frac{2}{x}\right) \in \mathbb{Q}$ suy ra $x \in \mathbb{Q}$ (điều phải chứng minh)	0,75
Câu 3		4.0 điểm
1 2.0điểm	1. Tìm tất cả các số nguyên x và y sao cho $x^4 + y^3 = xy^3 + 1$	2.0 điểm
	Theo đề bài, ta có: $x^4 + y^3 = xy^3 + 1$ (*) $\Leftrightarrow x^4 - 1 = xy^3 - y^3$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = y^3(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1 - y^3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^3 + x^2 + x + 1 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^3 + x^2 + x + 1 = y^3 \end{cases}$	0.5
	+/ Xét $x=1$, thay vào (*) $\Rightarrow 1 + y^3 = y^3 + 1 \Rightarrow y = k$ với $\forall k \in \mathbb{Z}$	0.5
	+/ Xét $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$ Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x^3 < x^3 + x^2 + x + 1$ (1) Vì $5x^2 + 11x + 7 > 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 < x^3 + x^2 + x + 1 + 5x^2 + 11x + 7$ $\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 < (x+2)^3$ (2) Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow x^3 < x^3 + x^2 + x + 1 < (x+2)^3 \Leftrightarrow x^3 < y^3 < (x+2)^3$ Mà x, y nguyên $\Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)^3$	0.75

a 2.0điểm	+) Chứng minh $\Delta AMC = \Delta CNK$ (C. G .C)	0.5
	$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NCK}$ và $AB = CK$	0.25
	Mà $\widehat{MAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NCK} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AC$ tại C	0.5
	+) Chứng minh tứ giác ABKC là hình chữ nhật	0.5
	+) Chứng minh tứ giác ABKC là hình vuông	0.25
b 2.0điểm	Gọi I là trung điểm của CK, F là giao điểm của BI và KN +) Chứng minh tứ giác BMCI là hình bình hành $\Rightarrow MC // BI$	0.5
	+) Xét ΔBHK có BF vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BHK}$ (1)	0.5
	Lại có : $\widehat{BKH} = \widehat{EHN}$ (hai góc đồng vị và $EH // BK$) (2)	0.25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{EHN} = \widehat{BHK}$ Mà $\widehat{EHN} + \widehat{MHE} = \widehat{BHK} + \widehat{MHB} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{MHE} = \widehat{MHB}$	0.5
	Suy ra HM là tia phân giác của góc BHE.	0.25
c 2.0điểm		
	Trên tia CH lấy điểm G sao cho $\widehat{HAG} = 90^\circ$ Vì $\widehat{AHC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AHG} = 45^\circ$ Mà $\widehat{HAG} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AHG$ vuông cân tại A $\Rightarrow AG = AH$ và $GH^2 = AH^2 + AG^2 = 2AH^2$ Xét ΔAGB và ΔAHC có: $AG = AH$ $\widehat{GAB} = \widehat{HAC}$ ($= 90^\circ - \widehat{BAH}$) $AB = AC$ (vì ΔABC vuông cân tại A) $\Rightarrow \Delta AGB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AGB} = \widehat{AHC}$ (2 góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{AGB} = 135^\circ$	0.25
	Vì $\Delta AGB = \Delta AHC \Rightarrow GB = HC$ (2 cạnh tương ứng)	0.5

	<p>Mà ΔAHG vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{AGH} = 45^\circ$ $\Rightarrow \widehat{BGH} = \widehat{AGB} - \widehat{AGH} = 90^\circ$ $\Rightarrow \Delta BGH$ vuông tại G Xét ΔBGH vuông tại G có: $BG^2 + GH^2 = HB^2$ $\Rightarrow HC^2 + GH^2 = HB^2$ $\Rightarrow HC^2 + 2AH^2 = HB^2$ $\Rightarrow HB^2 - HC^2 = 2AH^2$ (đpcm)</p>	0.5
Câu 5	<p>Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Tìm GTNN của</p> $P = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2}$	2.0 điểm
2.0 điểm	<p>Chứng minh bất đẳng thức $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$</p> $\Leftrightarrow 3a^2 - 3ab + 3b^2 \geq a^2 + ab + b^2$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow 2(a - b)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$	0.5
	<p>Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq \frac{1}{3}(a+b)(a^2 + ab + b^2)$</p> $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{\frac{1}{3}(a+b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a+b}{3}$ <p>Tương tự, $\frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{b+c}{3}$ và $\frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{c+a}{3}$</p> <p>Do đó $P \geq \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)$</p>	0.5
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương a,b,c, ta có:</p> $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \quad (\text{vì } abc = 1)$ $\Rightarrow P \geq \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$	0,25
	<p>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ Vậy GTNN của P là 2 tại a = b = c = 1</p>	0,25
	Điểm toàn bài	20 điểm