

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

(Đề có 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (8,0 điểm)

Hãy chọn phương án trả lời đúng rồi ghi vào tờ giấy thi.

Câu 1. Biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Rút gọn được kết quả bằng

- A. $\frac{2}{\sqrt{x}+1}$. B. $\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$. C. $\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$. D. $\frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 điểm A(-1; 3) và B(3; 5). Phương trình đường trung trực của AB là

- A. $y = x + 3$. B. $y = 2x + 2$. C. $y = -2x + 6$. D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

Câu 3. Cho biểu thức: $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Số các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên?

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 4. Cho đường thẳng (d): $y = (m-1)x + 2$. Khoảng cách từ điểm M(2;1) đến đường thẳng (d) là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Khi đó tổng các giá trị của m thỏa mãn là

- A. -12. B. 12. C. -10. D. 10.

Câu 5. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y} + 6 = 0$. Khi đó giá trị của x+y là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = -\frac{m}{2}x + \frac{5}{2}$ và (d'): $y = -2x + 1$. Giá trị của m để giao điểm của (d) và (d') nằm ở trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ Oxy là

- A. $m < 10$. B. $m > 10$. C. $m = 10$. D. $m = 0$.

Câu 7. Cho đa thức $f(x) = \frac{2x+1+\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Giá trị $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2022)$ là

- A. $S = \sqrt{2023} - 1$. B. $S = 2022\sqrt{2022} - 1$.
C. $S = 2022\sqrt{2023} - 1$. D. $S = 2023\sqrt{2023} - 1$.

Câu 8. Cho phương trình $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 4 = \frac{7x^2}{x+1}$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là

- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 9. Cho tam giác ABC. Lấy điểm D và E lần lượt trên các cạnh BC và AC sao cho $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{5}$. Gọi giao điểm của AD và BE là I. Tỉ số $\frac{AI}{ID}$ bằng

- A. $\frac{14}{15}$. B. $\frac{13}{15}$. C. $\frac{13}{14}$. D. $\frac{8}{9}$.

Câu 10. Cho điểm M là điểm tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác MBC, MCA và MAB. Khi đó tỉ số của $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AC tại D. Tia phân giác của góc C cắt AB tại N và BD tại M. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $CN \cdot CB = CM \cdot CD$. B. $CN \cdot CM = CD \cdot CB$.
C. $CN^2 = CM \cdot CB$. D. $CN \cdot CD = CM \cdot CB$.

Câu 12. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30\text{cm}$ và CA vuông góc với CB. Diện tích hình thang ABCD bằng

- A. $350\sqrt{3}(\text{cm}^2)$. B. $50\sqrt{3}(\text{cm}^2)$. C. $250\sqrt{3}(\text{cm}^2)$. D. $700\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$, $AH = 15(\text{cm})$.

Độ dài HC bằng

- A. $\frac{15\sqrt{74}}{7}(\text{cm})$. B. $3\sqrt{74}(\text{cm})$. C. $\frac{75}{7}(\text{cm})$. D. $21(\text{cm})$.

Câu 14: Cho hai đường tròn (O; 10cm) và (I; 17cm) cắt nhau tại M và N. Biết khoảng cách giữa hai tâm là 21cm. Độ dài của dây cung MN bằng

- A. 15(cm). B. 8(cm). C. 7(cm). D. 16(cm).

Câu 15. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$, $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I. Biết $OA = 4,5(\text{cm})$, $O'A = 2(\text{cm})$, độ dài BC bằng

- A. 6(cm). B. 9(cm). C. 10(cm). D. 3(cm).

Câu 16. Sau buổi sinh hoạt ngoại khóa, nhóm của Hằng rủ nhau đi ăn kem. Do quán mới khai trương nên có khuyến mại, bắt đầu từ ly kem thứ 5 giá mỗi ly kem được giảm 1500 (đồng) so với giá ban đầu. Nhóm của Hằng mua 9 ly kem với số tiền là 154 500 (đồng). Hỏi nếu nhóm của Hằng mua 15 ly kem thì hết bao nhiêu tiền?

- A. 270 000 (đồng).
C. 264 000 (đồng).

- B. 253 500 (đồng).
D. 255 000 (đồng).

II. PHẦN TỰ LUẬN. (12,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho a, b, c, k là các số nguyên thỏa mãn:
 $a^3 + b^3 + c^3 - 4 = k^2 - 4k - 2a + b - 2c$.

Chứng minh rằng: $k - 2$ chia hết cho 3.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2^x + 57 = y^2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$.

b) Cho đa thức $f(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $f(2) = 5, f(3) = 7, f(5) = 11$. Tính $4f(12) - 9f(10)$.

c) Giải phương trình: $2(x-4)\sqrt{x-2} + (x-2)\sqrt{x+1} + 2x - 6 = 0$.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O; R), đường kính AK. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và C nằm khác phía đối với AB). Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: Tứ giác BHCK là hình bình hành và $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

b) Chứng minh: $AP^2 = AQ^2 = 2AD \cdot OM$.

c) Khi BC cố định và A di động trên đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng đi qua H và song song với AO luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

(Chú ý: Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay)

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Lưu ý: Nếu học sinh làm cách khác, tổ chấm thống nhất cho điểm. Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai không tính điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm). Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	C	B	D	D	B	D	C
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	A	C	D	A	D	D	A	B

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho a, b, c, k là các số nguyên thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 - 4 = k^2 - 4k - 2a + b - 2c$
Chứng minh rằng: $k - 2$ chia hết cho 3.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2^x + 57 = y^2$.

Nội dung cần đạt	Điểm
a) Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 4 = k^2 - 4k - 2a + b - 2c$ $\Leftrightarrow a^3 - a + b^3 - b + c^3 - c = k^2 - 4k + 4 - 3a - 3c$ $\Leftrightarrow (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) = (k - 2)^2 - 3(a + c)$	0,5
$a^3 - a = (a - 1)a(a + 1) : 3$; $b^3 - b : 3$, $c^3 - c : 3 \Rightarrow (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) : 3$	0,5
mà $3(a + c) : 3 \Rightarrow (k - 2)^2 : 3 \Rightarrow k - 2 : 3$ Vậy, $k - 2$ chia hết cho 3.	0,5
b) Nếu $x < 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu x lẻ thì 2^x chia 3 dư 2, $2^x + 57$ chia 3 dư 2. Điều này không thể xảy ra vì số chính phương khi chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.	0,5
Vậy x là số chẵn, xét $x \geq 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $y \geq 0$ đặt $x = 2k$ ta có: $2^{2k} + 57 = y^2 \Rightarrow y^2 - 2^{2k} = 57 \Leftrightarrow (y - 2^k)(y + 2^k) = 1.57 = 3.19$	0,5
TH1: $\begin{cases} y - 2^k = 1 \\ y + 2^k = 57 \end{cases} \Rightarrow 2.2^k = 56$ vô nghiệm.	0,25
TH2: $\begin{cases} y - 2^k = 3 \\ y + 2^k = 19 \end{cases} \Rightarrow 2.2^k = 16 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow y = 11, x = 6$. Vậy phương trình có các nghiệm là: $(x; y) = (6; 11), (6; -11)$.	0,25

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$.

b) Cho đa thức $f(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $f(2) = 5, f(3) = 7, f(5) = 11$.
Tính $4f(12) - 9f(10)$.

c) Giải phương trình: $2(x-4)\sqrt{x-2} + (x-2)\sqrt{x+1} + 2x - 6 = 0$.

Nội dung cần đạt	Điểm
<p>a) Ta biến đổi phương trình:</p> $\left(\frac{x}{x+2} - (x+2)\right)^2 - (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2} + x - 3\right)\left(\frac{x}{x+2} - 3x - 1\right) = 0$ <p>Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x = \pm\sqrt{6}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$.</p>	0,5 0,5
<p>b) Đặt $Q(x) = f(x) - (2x+1)$ Ta thấy $x=2, x=3, x=5$ là nghiệm của $Q(x)$ Đặt $Q(x) = (x-2)(x-3)(x-5)(x+m)$ $\Rightarrow f(x) = (x-2)(x-3)(x-5)(x+m) + (2x+1)$ $\Rightarrow 4.f(12) - 9.f(10) = 5040$</p>	1,5
<p>c) ĐK: $x \geq 2$ $2(x-4)\sqrt{x-2} + (x-2)\sqrt{x+1} + 2x - 6 = 0.$ $\Leftrightarrow 2(x-4)(\sqrt{x-2} - 1) + (x-2)(\sqrt{x+1} - 2) + 6x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2(x-4)(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+1}-2} + 6(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+1}-2} + 6\right) = 0$ Ta có: $\frac{2x-8}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+1}-2} + 6 = \frac{2x-2+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+1}-2} > 0$ với $\forall x \geq 2$ Vậy $x=3$</p>	1,5

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O; R), đường kính AK. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và C nằm khác phía đối với AB). Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: Tứ giác BHCK là hình bình hành và $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

b) Chứng minh: $AP^2 = AQ^2 = 2AD \cdot OM$.

c) Khi BC cố định và A di động trên đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng đi qua H và song song với AO luôn đi qua một điểm cố định.

Nội dung cần đạt	Điểm
<p>a) Ta có $\Delta ABK, \Delta ACK$ có cạnh AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp nên $\Delta ABK, \Delta ACK$ vuông lần lượt tại B, K.</p>	0,25

BH//CK (cùng vuông góc AC), BK//CH (cùng vuông góc với AB) ⇒ Tứ giác BHCK là hình bình hành.	0,5
Xét tam giác vuông BDH và ADC có $\widehat{DBH} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ \widehat{ACB}). $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BH}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CK}{AC}$ (do BH = CK).	0,5
Suy ra: $\Delta BDA \sim \Delta KCA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.	0,25
b) Ta có BHCK là hình bình hành $\Rightarrow BC$ cắt HK tại trung điểm M. Tam giác AKH có OM là đường trung bình nên AH = 2OM.	0,25
Gọi N là giao điểm của AK và EF. Ta có: $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$	0,25
$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.	0,25
Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{AEF} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp EF$.	0,25
Ta có $AP^2 = AN \cdot AK$ và $\Delta ANF \sim \Delta ABK$ (g.g) $\Rightarrow AN \cdot AK = AF \cdot AB$	0,25
$\Delta AHF \sim \Delta ABD$ (g.g) $\Rightarrow AF \cdot AB = AH \cdot AD \Rightarrow AP^2 = AH \cdot AD = 2AD \cdot OM$	0,25
Vì AK vuông góc PQ nên $AP = AQ \Rightarrow AP^2 = AQ^2 = 2AD \cdot OM$	0,25
c) Qua H kẻ đường thẳng song song với AK cắt OM tại I. Suy ra tứ giác AHIO là hình bình hành $\Rightarrow AH = IO = 2OM$; $IH = OA = R$. Vì BC cố định nên OM không đổi $\Rightarrow IO$ không đổi \Rightarrow Điểm I cố định	1,0

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Nội dung cần đạt	Điểm
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{a(a+2b)}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{a+2b} \cdot \frac{a(a+2b)}{9}} = \frac{2}{3}a^2$ (1); $\frac{b^3}{b+2c} + \frac{b(b+2c)}{9} \geq \frac{2}{3}b^2$ (2); $\frac{c^3}{c+2a} + \frac{c(c+2a)}{9} \geq \frac{2}{3}c^2$ (3)	0,25
Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được: $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{9}(ab + bc + ca) \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} + \frac{2}{9}(ab + bc + ca) \geq \frac{5}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ (1')	0,25
Mặt khác ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ $\Rightarrow \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{2}{9}(ab + bc + ca)$ (2')	
Cộng theo vế các bất đẳng thức (1') và (2') ta được:	

$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} + \frac{2}{9}(ab+bc+ca) + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2}{9}(ab+bc+ca)$	0,25
$\Rightarrow \frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$	
Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$	0,25

Học sinh giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

-----**HẾT**-----