

**Bài I. (2,0 điểm)**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1. Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 9$ ;
2. Rút gọn B;
3. Tìm tất cả các giá trị của x để  $\frac{4B}{A}$  nhận giá trị là một số nguyên.

**Bài II. (2,5 điểm)**

*Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai người cùng làm một công việc thì sau 18 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 6 giờ, sau đó một mình người thứ hai làm trong 8 giờ thì cả hai người làm được  $\frac{2}{5}$  công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc ?

**Bài III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+1) - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4(x+1) + \sqrt{y-2} = 17 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d):  $y = 20(x+1) - 2m - 19$  và parabol (P):  $y = x^2$

- a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi  $m = 10$ ;
- b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

**Bài IV. (3,0 điểm)**

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không đi qua tâm O cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi C là điểm thuộc đường thẳng d sao cho A nằm giữa B và C. Vẽ đường kính PQ vuông góc với dây AB tại D (P thuộc cung lớn AB). Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I (I khác P), AB cắt IQ tại K.

1. Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp;
2. Chứng minh  $KB \cdot IQ = BQ \cdot BI$ ;
3. Chứng minh IK là đường phân giác trong của  $\Delta AIB$  và  $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BK}$ ;

4. Cho ba điểm A, B, C cố định và đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua A, B. Chứng minh đường thẳng IQ luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài V. (0,5 điểm)** Cho x, y là các số không âm thỏa mãn:  $x^2 + y^2 = 2$ .

Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) của biểu thức  $P = \sqrt{x(14x+10y)} + \sqrt{y(14y+10x)}$

.....Hết.....

## HƯỚNG DẪN CHẤM

| Bài | Phần | Nội dung  | Điểm       |
|-----|------|---|------------|
| I   |      |   | <b>2,0</b> |
|     | 1.   | Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức $A$   | 0,25       |
|     |      | tính được: $A = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = 12$  | 0,25       |
|     | 2.   | $B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$   | 0,25       |
|     |      | $= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$  | 0,25       |
|     |      | $= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$  | 0,25       |
|     |      | $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$   | 0,25       |
|     | 3.   | Với $x = 0$ thì $\frac{4B}{A} = 0$ (thỏa mãn).<br>Vi $x > 0$ nên $\frac{4B}{A} > 0$ .<br>Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\frac{4\sqrt{x}}{x+3} \leq \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$<br>Do đó $0 < \frac{4B}{A} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4B}{A} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4B}{A} = 1$<br>Với $\frac{4B}{A} = 1$ thì $x+3 = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$ (TMDK)<br>Vậy $x = 0; x = 1; x = 9$ là những giá trị để $\frac{4B}{A}$ nhận giá trị là một số nguyên. | 0,25       |
| II  |      |   | <b>2,5</b> |
|     |      | Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là $x(h)$ và $y(h)$ ( $x, y > 18$ )  | 0,25       |
|     |      | Mỗi giờ, người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)  |            |
|     |      | Mỗi giờ, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)   | 0,5        |
|     |      | Mỗi giờ, cả hai người làm được $\frac{1}{18}$ (công việc).<br>Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}$  | 0,25       |
|     |      | Lập luận lập được phương trình: $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{5}$   | 0,25       |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
|          | Tính được $\widehat{QIP} + \widehat{KDP} = 180^\circ$   | 0,25       |
|          | $\Rightarrow$ Tứ giác PDKI nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).  | 0,25       |
| 2        | C/m được: $\widehat{QA} = \widehat{QB} \Rightarrow \widehat{QBK} = \widehat{QIB}$   | 0,25       |
|          | C/m được: $\Delta KBQ \sim \Delta BIQ$ (g - g)  | 0,25       |
|          | $\Rightarrow \frac{KB}{BI} = \frac{BQ}{IQ} \Rightarrow KB.IQ = BQ.BI$   | 0,25       |
| 3        | C/m được: $\widehat{QIA} = \widehat{QIB}$   |            |
|          | Từ đó suy ra IK là đường phân giác trong của $\Delta AIB \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{IA}{IB}$ (1)   | 0,25       |
|          | Vì IC vuông góc với IK (giả thiết) mà IK là phân giác trong góc I của $\Delta AIB$ nên IC là phân giác ngoài của $\Delta AIB$   | 0,25       |
|          | $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{IA}{IB}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BK}$ (điều phải chứng minh)   | 0,25       |
| 4        | C/m được $\Delta CIA \sim \Delta CBP$ (g-g) $\Rightarrow CI.CP = CA.CB$ (1)   | 0,25       |
|          | C/m được $\Delta CIK \sim \Delta CDP$ (g-g) $\Rightarrow CI.CP = CK.CD$ (2)   |            |
|          | Từ (1) và (2) suy ra $CA.CB = CK.CD \Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CD} \dots$  |            |
|          | Lập luận chỉ ra được: K là điểm cố định   | 0,25       |
| <b>V</b> |   | <b>0,5</b> |
|          | $P = \sqrt{x(14x+10y)} + \sqrt{y(14y+10x)} = \sqrt{14x^2+10xy} + \sqrt{14y^2+10xy}$ <p>...</p> $P = \sqrt{14x^2+10xy} + \sqrt{14y^2+10xy} \leq \sqrt{2(14x^2+10xy+14y^2+10xy)}$ $P \leq \sqrt{2.24(x^2+y^2)} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ | 0,25       |
|          | Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$ (TM)  | 0,25       |
|          | Vậy $\text{Max } P = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow x = y = 1$   |            |