

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Ngày 15 tháng 3 năm 2023

Câu 1 (2,0 điểm). 1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2} - 1 = 0$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{2}{1-x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

2) Cho ba đường thẳng phân biệt $y = 3x - 1$; $y = (m^2 - 1)x + m - 3$; $y = x + 1$.
Tìm m để ba đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Hai tổ sản xuất dự kiến làm 1000 chiếc khẩu trang trong một thời gian quy định. Khi làm việc do cải tiến kỹ thuật, tổ I đã vượt mức 10%, tổ II vượt mức 15% nên hết thời gian quy định hai tổ đã làm được 1130 chiếc khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch, mỗi tổ phải làm bao nhiêu chiếc khẩu trang?

2) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 2m - 1 \\ 2x + y = m + 1 \end{cases}$$
 (với m là tham số). Tìm số tự nhiên

m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn $AB < BC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ DI vuông góc với AB tại I, DH vuông góc với BC tại H.

1) Chứng minh: bốn điểm B, H, D, I cùng nằm trên một đường tròn?

2) Chứng minh: $BI \cdot BA = BH \cdot BC$ và $\widehat{ABD} = \widehat{CBO}$

3) Tia IH cắt (O) tại K. Chứng minh: tam giác BDK cân?

Câu 5 (1,0 điểm). Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a \geq \frac{4}{3}$, $b \geq \frac{4}{3}$, $c \geq \frac{4}{3}$ và $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \geq \frac{6}{5}$$
.

.....Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ KHẢO SÁT TOÁN - NGÀY 15/2/2023

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2 điểm)	1) (1 điểm)	
	ĐK: $x \geq 2$	0,25
	$\sqrt{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow x - 2 = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 3$ (TMĐK)	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$	
2 (2 điểm)	2) (1 điểm)	
	$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ 6x - 8y = 4 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \cdot 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$	
2 (2 điểm)	1) (1 điểm)	
	Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có: $P = \left(\frac{1}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2}{1 - x}$	
	$P = \frac{1 \cdot (\sqrt{x} - 1) - 1 \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{1 - x}{2}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{x - 1}{-2}$	0,25
	$= \frac{-2}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x - 1}{-2}$	0,25
	$= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$	0,25
Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$		
2 (2 điểm)	2) (1 điểm)	
	Để ba đường thẳng cắt nhau thì $\begin{cases} m^2 - 1 \neq 3 \\ m^2 - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \neq \pm \sqrt{2} \end{cases}$	0,25
	Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $y = 3x - 1$ và $y = x + 1$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
Để ba đường thẳng đã cho đồng quy tại 1 điểm thì đường thẳng		

	$y = (m^2 - 1)x + m - 3$ đi qua $(1; 2)$ Thay $x = 1$ và $y = 2$ vào $y = (m^2 - 1)x + m - 3$ ta có $m^2 - 1 + m - 3 = 2$ $\Leftrightarrow (m - 2)(m + 3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu với điều kiện ta có $m = 2$ (Loại), $m = -3$ (TM đk) Vậy $m = -3$ thì ba đường thẳng đã cho đồng quy tại 1 điểm	0,25
3 (2 điểm)	1) (1 điểm) Gọi số khẩu trang tổ I, II sản xuất theo kế hoạch lần lượt là x, y (chiếc) ($x, y \in \mathbb{Z}; 0 < x, y < 1000$) Hai tổ dự kiến sản xuất 1000 chiếc nên ta có pt: $x + y = 1000$ Thực tế, tổ I sản xuất được $x + 10\%x$ (chiếc), tổ II sản xuất được $y + 15\%y$ (chiếc) nên ta có phương trình: $1,1x + 1,15y = 1130$ Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1000 \\ 1,1x + 1,15y = 1130 \end{cases}$	0,25
	Giải hệ phương trình trên ta được: $\begin{cases} x = 400 \\ y = 600 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy theo kế hoạch, tổ I sản xuất 400 chiếc, tổ II sản xuất 600 chiếc khẩu trang.	0,25
	2) (1 điểm) $\begin{cases} x - y = 2m - 1 \\ 2x + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3m \\ 2x + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2m + y = m + 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 1 - m \end{cases}$	
	\Rightarrow HPT có nghiệm là: $\begin{cases} x = m \\ y = 1 - m \end{cases}$	0,25
	Theo bài ra ta có: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ Mà $x = m; y = 1 - m$ $\Rightarrow (m - 1)^2 + (1 - m - 1)^2 = 5$ $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$ $\Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -1$ mà m là số tự nhiên $\Rightarrow m = 2$ Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,25
	1) (1 điểm) Hình vẽ:	0.25

<p style="text-align: center;">4 (3 điểm)</p>	<p>Ta có: tam giác BDI vuông tại I (Vì $DI \perp AB$) nên tam giác BDI nội tiếp đường tròn đường kính BD. (1)</p>	0,25
	<p>Tam giác BDH vuông tại H (Vì $DH \perp AC$) nên tam giác BDH nội tiếp đường tròn đường kính BD. (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) \Rightarrow 4 điểm B, H, D, I cùng nằm trên đường tròn đường kính BD.</p>	0,25
	<p>2) (1 điểm)</p>	
	<p>Xét tam giác ADB vuông tại D (Vì $BD \perp AC$) có $DI \perp AB$ (gt) nên theo hệ thức lượng, ta có $BD^2 = BA \cdot BI$ (1)</p>	0,25
	<p>Xét tam giác BCD vuông tại D (Vì $BD \perp AC$) có $DH \perp BC$ (gt), ta có $BD^2 = BC \cdot BH$ (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) ta có $BA \cdot BI = BC \cdot BH$</p>	0,25
	<p>Kẻ đường kính AM, ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)</p>	
	<p>$\Rightarrow \widehat{CBO} + \widehat{BMC} = 90^\circ$</p>	0,25
	<p>Có $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ vì BD vuông góc với AC</p>	
	<p>Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (Cùng chắn cung BC)</p>	
	<p>$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBO}$</p>	0,25
	<p>3) (1 điểm)</p>	
	<p>Gọi N là giao điểm của KI và BM</p>	
	<p>Ta có ta có $\widehat{BHN} = \widehat{BDI}$ (Cùng chắn cung BI)</p>	
	<p>Mà $\widehat{HBN} = \widehat{DBI}$ (C/M trên)</p>	

