

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Rút gọn B
- Với $x \in \mathbb{N}, x \neq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$.

Câu 2. (2,5 điểm).

- Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Năm ngoái, tổng cân nặng của bạn An và Bình là 95kg. Năm nay, cân nặng của bạn An tăng 5%, còn cân nặng của bạn Bình tăng 8%, do đó tổng cân nặng của hai bạn đó là 101,25 kg. Tính cân nặng của mỗi bạn năm ngoái.
- Vào lúc 9h sáng Thứ hai tuần qua, bạn Danh Nhân nhận thấy bóng của một cây Xoài trong sân trường TH&THCS Mỹ Đức dài 6m và khi đó tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 51° . Tính chiều cao của cây Xoài theo đơn vị mét (m) (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 3. (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + 3\sqrt{y} = 8 \\ \frac{3}{x-1} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}.$$

- Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P).
 - Vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên hệ trục tọa độ Oxy.
 - Lấy hai điểm $A(-1;a)$ và $B(2;b)$ thuộc (P). Gọi D và C lần lượt là hình chiếu của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

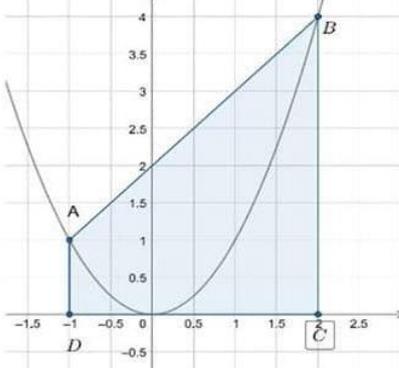
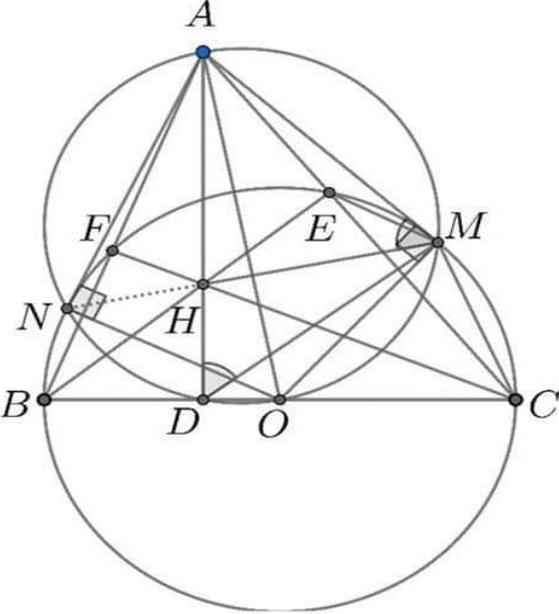
Câu 4. (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC, đường tròn tâm O đường kính BC cắt AC, AB lần lượt tại E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

- Chứng minh các tam giác BEC, tam giác BFC là các tam giác vuông và AH vuông góc với BC
- Từ A kẻ tiếp tuyến AM (M nằm trên cung nhỏ CE). Chứng minh rằng $AM^2 = AE.AC$.
- Kẻ tiếp tuyến AN của đường tròn (O) (N thuộc cung nhỏ BF). Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh $AM^2 = AH.AD$ và ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Câu 5. (0,5 điểm). Cho hai số không âm a và b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2$.

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
1 (2 điểm)	a	<p>Thay $x = 4$ (tmđk) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4-1}} = 3$.</p> <p>Vậy khi $x = 4$ thì $A = 3$.</p>	0.25 0.25
	b	<p>Ta có $B = \frac{1(\sqrt{x+1}) + \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x+1}} =$</p> $\frac{2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ <p>Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$, với $x \geq 0; x \neq 1$.</p>	0.5 0.5
	c	<p>Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.</p> <p>Do $x \in \mathbb{N}, x \neq 1$ nên chỉ xảy ra: $\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 2; x \in \mathbb{N} \end{cases}$.</p> <p>TH1: Nếu $x = 0 \Rightarrow P = 0$.</p> <p>TH2: Nếu</p> $x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2-1} > 0 \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 2 + \sqrt{2}$ <p>Từ đó có giá trị lớn nhất của P là $2 + \sqrt{2}$ đạt được khi $x = 2$.</p>	0.25 0.25
Câu 2 (2,5 điểm)	1	<p>Gọi cân nặng năm ngoái của An và Bình lần lượt là x (kg) và y (kg) (ĐK: $0 < x, y < 95$)</p> <p>Do tổng cân nặng năm ngoái của An và Bình là 95kg nên ta có phương trình $x + y = 95$ (1).</p> <p>Cân nặng năm nay của An là $1,05x$ (kg)</p> <p>Cân nặng năm nay của Bình là $1,08y$ (kg)</p> <p>Tổng cân nặng năm nay của An và Bình là 101,25kg nên ta có phương trình $1,05x + 1,08y = 101,25$ (2).</p> <p>Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x + y = 95 \\ 1,05x + 1,08y = 101,25 \end{cases}$</p> <p>Học sinh giải hệ phương trình đúng $\begin{cases} x = 45 \\ y = 50 \end{cases}$ (tmđk).</p> <p>Vậy cân nặng năm ngoái của An là 45kg, cân nặng năm ngoái của Bình là 50 kg</p>	0.25 0.25 0.25 0.25 0.5 0.25

	2	Học sinh nêu đúng được công thức tính chiều cao của cây Xoài là: $h = 6 \tan 51^\circ$ Học sinh tính đúng và kết luận đúng chiều cao cây Xoài $h \approx 7,41$ (m)	0.25 0.25
Câu 3 (2 điểm)	1	ĐK: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x-1} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - b = 1 \end{cases}$ Học sinh giải ra được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ Từ đó học sinh giải ra được $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (tmdk) và kết luận đúng	0.25 0.25 0.25 0.25
	2a	Học sinh vẽ đúng được đồ thị 	0.5
	2b	Học sinh tính đúng được tọa độ điểm A và điểm B: $A(-1;1)$ và $B(2;4)$ Học sinh giải thích và tính đúng được diện tích tứ giác ABCD là $S = \frac{1}{2}(AD + BC).DC = \frac{1}{2} \cdot (1 + 4) \cdot 3 = 7,5$ (đơn vị diện tích)	0.25 0.25
	Câu 4 (3 điểm)	a	Vẽ hình đúng đến câu a) 

	<p>Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BEC vuông tại E</p> <p>Lại có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F</p> <p>Từ trên có BE, CF là hai đường cao của tam giác ABC mà chúng cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác ABC nên SH vuông góc với BC (đpcm)</p>	0.25
	<p>Lại có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F</p>	0.25
	<p>Từ trên có BE, CF là hai đường cao của tam giác ABC mà chúng cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác ABC nên SH vuông góc với BC (đpcm)</p>	0.5
b	<p>Xét tam giác AME và tam giác ACM có \widehat{A} chung,</p> $\widehat{AME} = \widehat{ACM} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EM} \right)$ <p>nên hai tam giác đó đồng dạng (g.g)</p> <p>Suy ra $\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$</p>	0.75
	<p>Suy ra $\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$</p>	0.25
c	<p>Theo câu b) ta có $AM^2 = AE.AC$ (1).</p> <p>Tam giác AEH đồng dạng với tam giác ADC (g.g) nên $AE.AC = AH.AD$ (2).</p> <p>Từ (1) và (2) có $AM^2 = AH.AD$.</p> <p>Do $AM^2 = AH.AD \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AD}{AM}$ suy ra tam giác AMH đồng dạng với tam giác ADM (c.g.c) nên $\widehat{AMH} = \widehat{ADM}$ (3).</p> <p>Chúng tỏ được 5 điểm A, M, N, D, O cùng nằm trên đường tròn đường kính AO nên $\widehat{ADM} = \widehat{AOM}$ (4).</p> <p>Lại có $\widehat{AMN} = \widehat{AON}$ (5)</p> <p>Mặt khác $\widehat{AON} = \widehat{AOM}$ (6) (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau).</p> <p>Từ (3), (4), (5) và (6) có $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$ nên suy ra ba điểm M, H, N thẳng hàng</p>	0.25
	<p>Từ (3), (4), (5) và (6) có $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$ nên suy ra ba điểm M, H, N thẳng hàng</p>	0.25
Câu 5 (0,5 điểm)	<p>*) Tìm giá trị nhỏ nhất của P</p> <p>Chúng minh được bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ (*), dấu bằng xảy ra khi $x = y$.</p> <p>Áp dụng (*) ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ (1), dấu bằng xảy ra khi $a = b$.</p> <p>Áp dụng (*) ta cũng có $a + b \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{2} = \frac{1}{2}$ (2), dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{4}$.</p> <p>Từ (1) và (2) có $P = a^2 + b^2 \geq \frac{1}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{4}$.</p>	

