ĐỀ KHẢO SÁT TOÁN 9
Năm học 2022 - 2023
Ngày kiểm tra: ……./02/2023
Thời gian làm bài: 90 phút(Không kể thời gian phát đề)

Bài I. *(3,5 điểm)*

1. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy\\(x+4)(y-3)=xy+6\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3}+4\sqrt{y+2}=5\\[2mm]\dfrac{3}{2x-3}+5\sqrt{y+2}=1\end{cases}$

2. Cho parabol (P): $y=ax^2$

a) Tìm hệ số a biết (P) đi qua điểm (-1;1).

b) Với giá trị tìm được của a, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và đường thẳng (d): $y=-2x+3$ và tính diện tích tam giác OAB.

Bài II. *(2,5 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Theo kế hoạch, hai tổ công nhân phải làm 320 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhưng khi thực hiện do tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch 15%, tổ II làm giảm 10% so với kế hoạch nên cả hai tổ làm được 333 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài III *(3,5 điểm)*

Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C; MC cắt đường tròn (O) tại điểm D (D khác C).

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MA^2=MD.MC$.

c) Tia AD cắt MB tại E. Chứng minh $BE^2 = ED.EA$ và E là trung điểm của MB.

d) Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia MA, MB lần lượt tại P và Q. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Bài IV. *(0,5 điểm)* Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}.$$

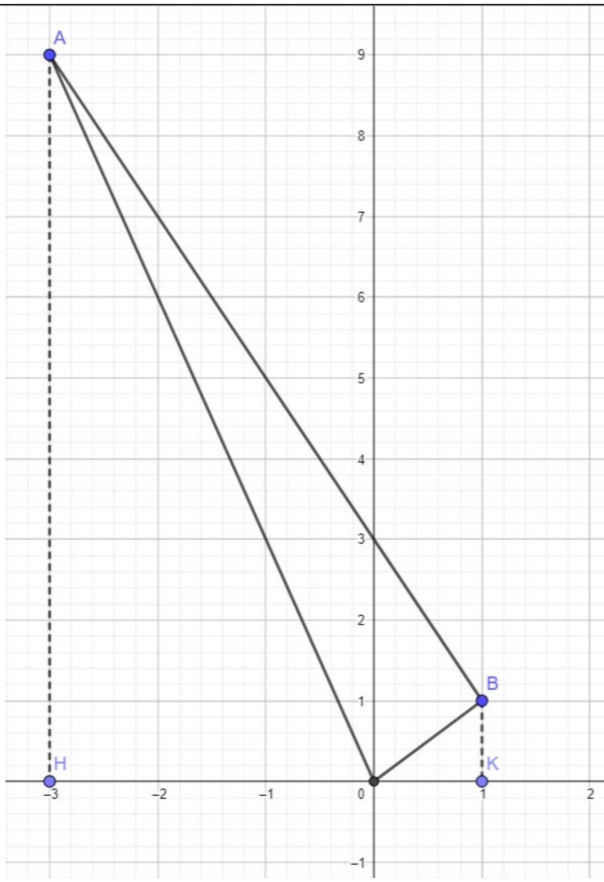
--------- Hết ---------

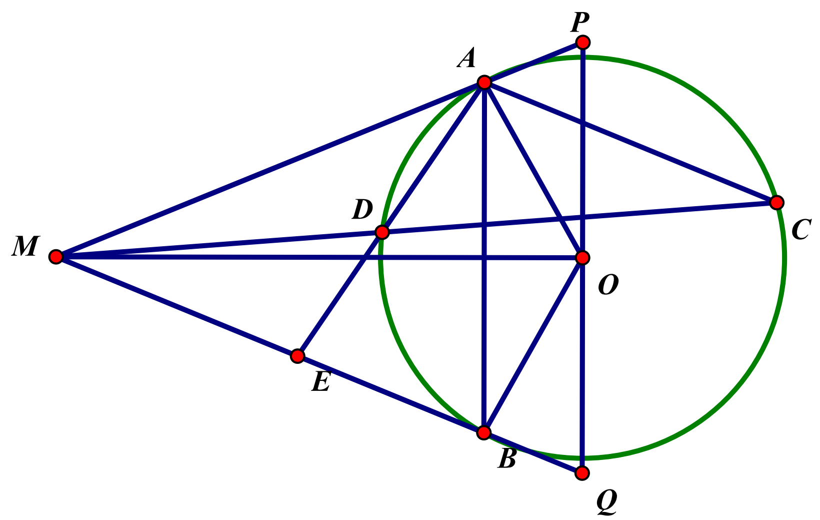
PHÒNG GD – ĐT QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

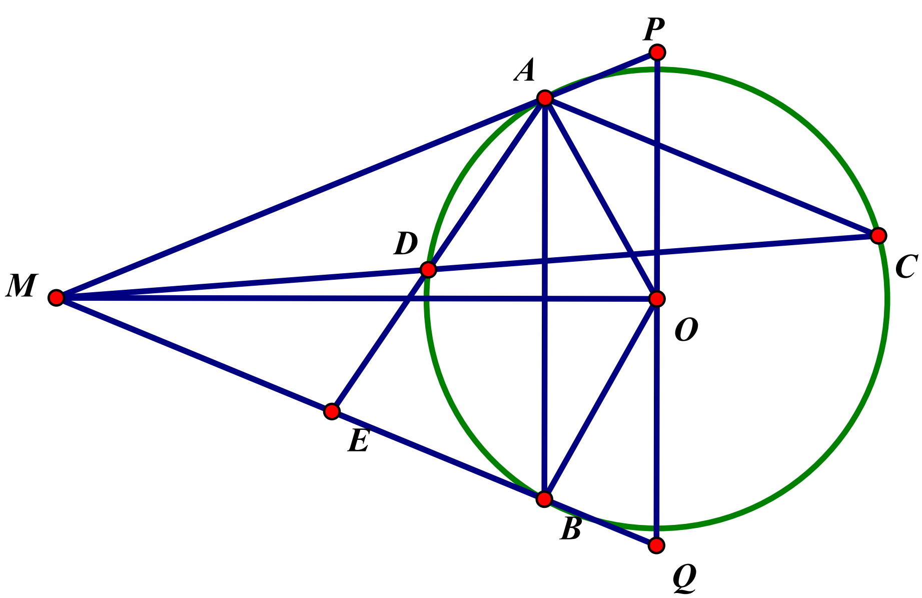
(Đề gồm 01 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ KHẢO SÁT TOÁN 9 LẦN
Năm học 2022 - 2023
Ngày kiểm tra: 25/02/2023
Thời gian làm bài: 90 phút(Không kể thời gian phát đề)

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
I		**3,5**
a)	$\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy\\(x+4)(y-3)=xy+6\end{cases}$	**1**
	$\Leftrightarrow\begin{cases}xy-2x+2y-4=xy\\xy-3x+4y-12=xy+6\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2y=4\\-3x+4y=18\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\y=12\end{cases}$	0,25
	Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất (x,y) = (10;12)	0,25
b)	$\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3}+4\sqrt{y+2}=5\\\dfrac{3}{2x-3}+5\sqrt{y+2}=1\end{cases}$	**1,0**
	$(DK: x\neq\dfrac{3}{2}; y\geq -2)$	0,25
	Đặt $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3}=a\\\sqrt{y+2}=b\end{cases}$ (đk: b≥0). Hệ pt: $\begin{cases}a+4b=5\\3a+5b=1\end{cases}$	0,25
	Giải ra $\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$ (tmđk)	0,25
	Thay lại ta có: $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3}=-3\\\sqrt{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=2\end{cases}(tmdk)$ Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{4}{3};2\right)$ *(Thiếu đkxđ và tmđk trừ: 0.25)*	0,25
2	Cho parabol (P): $y=ax^2$	**1,5**
	a) (P) đi qua điểm (-1;1) $\Leftrightarrow 1=a(-1)^2\Leftrightarrow a=1$	0,5
	b)	1,0

	Xét phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d): $x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ Giải: x = 1 hoặc x = - 3	0,25
	Với x = 1 ta có y =1 Với x = -3 ta có y = $(-3)^2 = 9$ Vậy A(-3; 9) và B(1; 1)	0,25
	 Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên trục Ox Ta có: AH = 9, BK = 1, HK = 4 $S_{ABKH} = \frac{(1+9).4}{2} = 20(dvdt)$ $S_{\Delta A0H} = \frac{1}{2}.9.3 = 13,5(dvdt)$ $S_{\Delta B0H} = \frac{1}{2}.1.1 = 0,5(dvdt)$ $S_{\Delta A0B} = 20 - 13,5 - 0,5 = 6(dvdt)$	0,25 0,25
II	Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình	**2,5**
	Gọi số sản phẩm tổ I phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm) ; x ∈ N, 0 < x < 320 Số sản phẩm tổ II phải làm theo kế hoạch là y (sản phẩm), y ∈ N, 0 < y < 320.	0,5
	Vì theo kế hoạch hai tổ sx 320 sp nên ta có PT: x + y = 320 (1)	0,25
	Số sản phẩm thực tế của tổ I là: 1,15x (sản phẩm). Số sản phẩm thực tế của tổ II là: 0,9y (sản phẩm).	0,5
	Vì số sản phẩm thực tế của hai tổ là 333 sản phẩm nên ta có pt 1,15x + 0,9y = 333 (2)	0,25
	Từ (1) (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 320 \\ 1,15x + 0,9y = 333 \end{cases}$	0,5

	Giải HPT ta được x = 180 (TMĐK), y = 140(TMĐK) Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 180 sản phẩm. Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 140 sản phẩm.	0,5
III		**3,5**
a)	***Chứng minh: bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.***	***1,0***
		
	Xét (O): MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B (giả thiết). $\Rightarrow OA \perp AM, OB \perp BM$ (tính chất tiếp tuyến). $\Rightarrow \widehat{OAM} = 90^0, \widehat{OBM} = 90^0$	0,5
	$\Rightarrow$ A và B cùng nhìn OM dưới một góc vuông $\Rightarrow$ A, B thuộc đường tròn đường kính OM $\Rightarrow$ Bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM (đpcm).	0,5
b)	**Chứng minh:** $MA^2 = MD.MC$.	***1,0***
	Xét (O): $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)	0,25
	Xét ΔMDA và ΔMAC có : $\widehat{DAM} = \widehat{ACM}$ (cmt) $\widehat{AMC}$ chung $\Rightarrow \Delta MDA \backsim \Delta MAC (g.g)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA}$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow MA^2 = DM.MC$ (đpcm)	0,25
c)	**Chứng minh: BE^2 = ED.EA và E là trung điểm của MB**	***1,0***
	Xét ΔBDE và ΔABE có : $\widehat{DBE} = \widehat{BAE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của (O)) $\widehat{AEB}$ chung $\Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta ABE \ (g-g)$.	0,5

	$\Rightarrow \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE.DE$ (1)	
	Ta có : $AC//MB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{EMD}$ (hai góc so le trong) Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{DAM}$ hay $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{EAM}$ Xét ΔDME và ΔMAE có : $\widehat{EMD} = \widehat{EAM}$ (cmt) $\widehat{AEM}$ chung $\Rightarrow \Delta DME \backsim \Delta MAE$ $(g-g)$. $\Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{DE}{ME} \Rightarrow ME^2 = AE.DE$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow BE^2 = ME^2 \Leftrightarrow BE = ME$ => E là trung điểm của BM (đpcm)	0,5
d)	**Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.**	***0,5***
		
	PQ // AB, ΔMAB cân -> ΔMPQ cân tại M	
	C/m MO là trung trực của AB -> MO cũng là trung trực của PQ.	
	$\Rightarrow S_{\Delta MPQ} = 2S_{\Delta MOP} = 2.\dfrac{1}{2}.OA.PM = OA.(AP + AM)$	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OPM, đường cao OA, ta có: $OA^2 = AP.AM$ Áp dụng BĐT cosi ta có: $AP + AM \geq 2\sqrt{AP.AM} = 2\sqrt{OA^2} = 2OA = 2R$ $\Rightarrow S_{\Delta MPQ} = 2S_{\Delta MOP} \geq OA.2OA = 2OA^2 = 2R^2$ (vì OM = R). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AP = AM = R$ $\Leftrightarrow$ ΔMOA vuông cân tại A. $\Leftrightarrow OM = R\sqrt{2}$ Vậy điểm M cách O một khoảng bằng $R\sqrt{2}$ thì $\left(S_{\Delta MPQ}\right)_{min} = 2R^2$ (đvdt)	0,25
IV	Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức	**0,5**

	$$A=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}.$$	
	Với $a>0;b>0$ ta có: $(a^2-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^4-2a^2b+b^2\ge 0\Rightarrow a^4+b^2\ge 2a^2b$ $\Leftrightarrow a^4+b^2+2ab^2\ge 2a^2b+2ab^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}\le\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (1)	
	Tương tự có $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\le\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow A\le\frac{1}{ab\left(a+b\right)}$	0,25
	Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Leftrightarrow a+b=2ab$ mà $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\ge 1\Rightarrow A\le\frac{1}{2(ab)^2}\le\frac{1}{2}$.	
	Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow A=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{2}$ khi a = b = 1	0,25