

**Câu I (3 điểm).**

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^8(1+x^2) + y^8(1+y^2) = 4. \end{cases}$$

2) Chứng minh rằng  $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$  chia hết cho 19 với mọi  $n$  nguyên dương.

**Câu II (3 điểm).**

1) Tìm  $x, y, z$  nguyên dương thỏa mãn

$$x + y + 1 = xyz.$$

2) Với  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx = 1$ , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}.$$

**Câu III.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại các điểm  $D, E, F$ . Các đường thẳng  $IB, IC$  theo thứ tự cắt  $EF$  tại  $M, N$ .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác  $BCMN$  nội tiếp.
- 2) Giao điểm của hai đường thẳng  $DM, DN$  với  $(I)$  là  $Q, P$  khác  $D$ . Chứng minh rằng  $PQ \parallel BC$ .
- 3) Gọi giao điểm của  $CP$  và  $BQ$  là  $J$ . Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $EF$ . Chứng minh rằng  $DJ$  và  $AK$  cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Câu IV (1 điểm).** Cho dãy số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thuộc đoạn  $[-1, 1]$ . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

..... Hết .....