

TS. TRẦN XUÂN TIẾP
PHẠM HOÀNG - PHAN HOÀNG NGÂN

Đề kiểm tra

Toán 9

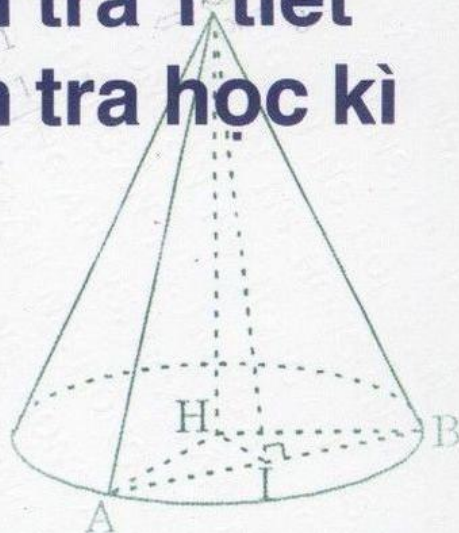
TẬP 2

- Kiểm tra 15 phút
- Kiểm tra 1 tiết
- Kiểm tra học kì

(Tái bản
lần thứ nhất)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
-------------------	---

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn	5
§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	10
§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế	15
§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số	19
§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình	23
Ôn tập chương III	27

Chương IV. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	36
§2. Phương trình bậc hai một ẩn	40
§3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai	45
§4. Công thức nghiệm thu gọn	52
§5. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng	56
§6. Phương trình quy về phương trình bậc hai	62
§7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	67
Ôn tập chương IV	70

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§1. Góc ở tâm. Số đo cung	80
§2. Liên hệ giữa cung và dây	83
§3. Góc nội tiếp	88
§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung	95
§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn	101
§6. Cung chứa góc	108
§7. Tứ giác nội tiếp	113
§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp	120
§9. Độ dài đường tròn, cung tròn	124
§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn	127
Ôn tập chương III	131

Chương IV. HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

§1. Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ	143
§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt	147
§3. Hình cầu. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu	151
Ôn tập chương IV	155
Đề kiểm tra học kì II	162

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng $ax + by = c$ ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$
 $\Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$.
- Tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi một đường thẳng :

$$+ a \neq 0 \text{ và } b \neq 0 : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

$$+ a = 0; b \neq 0 : y = \frac{c}{b}$$

$$+ a \neq 0; b = 0 : x = \frac{c}{a}$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình : $3x - y = 6$.
2. Cho hai phương trình : $2x - 3y = 1$ và $x - y = 1$.
Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó.

Giải

1. Ta có : $y = 3x - 6$.

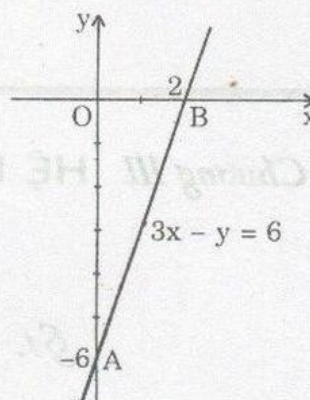
Vậy công thức nghiệm tổng quát là
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Bảng giá trị :

x	0	2
y	-6	0

Đường thẳng $y = 3x - 6$ qua hai điểm :

$A(0; -6)$ và $B(2; 0)$.



2. • Vẽ đường thẳng $2x - 3y = 1$

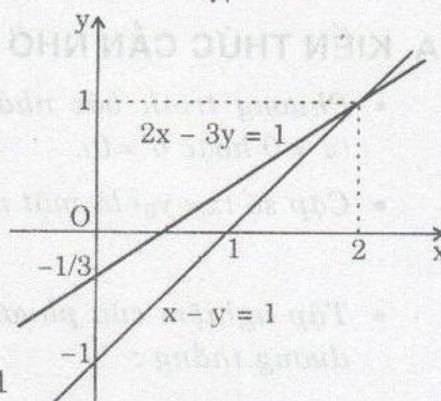
$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Bảng giá trị :

x	0	2
y	$-\frac{1}{3}$	1

Đường thẳng (d) qua hai điểm :

$(0; -\frac{1}{3})$ và $(2; 1)$.



- Vẽ đường thẳng $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Bảng giá trị :

x	0	1
y	-1	0

Đường thẳng (d') qua hai điểm : $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') :

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3x - 3 \Leftrightarrow x = 2$$

Thế $x = 2$ vào phương trình : $y = x - 1 \Rightarrow y = 1$

Tọa độ giao điểm : $(2; 1)$.

ĐỀ SỐ 2

- Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x + 2y = -4$.
- Cho phương trình $x - y = 2$.
 - Xác định m để cặp số $(1; m + 2)$ là một nghiệm của phương trình.
 - Cặp số $(\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1)$ có phải là một nghiệm của phương trình hay không ?

Giải

1. • Ta có : $x + 2y = -4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$

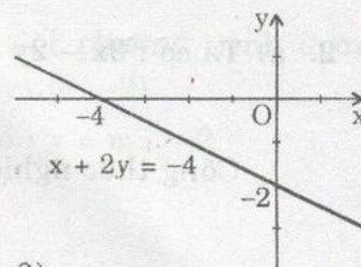
Vậy công thức nghiệm tổng quát là : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{2}x - 2. \end{cases}$

- Vẽ đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Bảng giá trị :

x	0	-4
y	-2	0

Đường thẳng qua hai điểm (0; -2) và (-4; 0).



2. a) Thế $x = 1$; $y = m + 2$ vào phương trình $x - y = 2$, ta được :

$$1 - (m + 2) = 2 \Rightarrow m = -3.$$

- b) Thế $x = \sqrt{2} + 1$; $y = \sqrt{2} - 1$ vào phương trình $x - y = 2$, ta được :

$$\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (đúng)}$$

Vậy cặp số $(\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1)$ là một nghiệm của phương trình.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho phương trình : $(m - 1)x + (m + 1)y = 1$.

a) Tìm m để cặp số (1; 1) là một nghiệm của phương trình.

b) Cặp số $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ có phải là một nghiệm của phương trình hay không ?

2. Cho phương trình $3x - 2y = 2$.

a) Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình.

Giải

1. a) Thế $x = 1$; $y = 1$ vào phương trình, ta được :

$$m - 1 + m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

- b) Thế $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$ vào phương trình, ta được :

$$-\frac{1}{2}(m - 1) + \frac{1}{2}(m + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} = 1 \text{ (luôn đúng với mọi m)}$$

Vậy cặp số $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là một nghiệm của phương trình.

Nhận xét : Điểm $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng

$(m-1)x + (m+1)y = 1$ luôn đi qua khi m thay đổi.

2. a) Ta có : $3x - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 1$

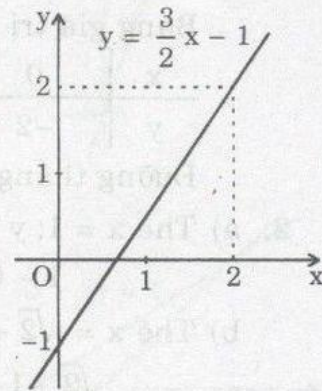
Công thức nghiệm tổng quát : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - 1$:

Bảng giá trị :

x	0	2
y	-1	2

Đường thẳng qua hai điểm : $(0; -1)$ và $(2; 2)$.



b) Ta có : $3x - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 \Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{x}{2}$

Ta tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ (khi đó $y \in \mathbb{Z}$);

$$\frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k; k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó nghiệm nguyên là cặp số $(2k; 3k - 1); k \in \mathbb{Z}$.

ĐỀ SỐ 4

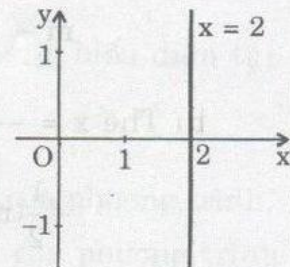
- Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình : $2x + 0.y = 4$.
- Xác định một phương trình bậc nhất hai ẩn số, biết hai nghiệm là $(3; 5)$ và $(0; -2)$.

Giải

1. Ta có : $x = 2$.

Công thức nghiệm tổng quát : $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 2 \end{cases}$

Đường thẳng $x = 2$ song song với Oy cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ).



2. Phương trình có dạng : $ax + by = c$.

- Nếu $a = 0, b \neq 0$, ta có : $by = c$.

$(3; 5)$ và $(0; -2)$ là hai nghiệm $\Rightarrow \frac{c}{b} = 5$ và $\frac{c}{b} = -2$ (vô nghiệm).

- Nếu $a \neq 0$; $b = 0$, ta có : $ax = c$.

Tương tự : $\frac{c}{a} = 3$ và $\frac{c}{a} = 0$ (vô nghiệm).

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, ta đưa về bài toán viết phương trình đường thẳng (d) : $y = mx + n$ qua hai điểm (3; 5) và (0; -2).

Điểm (0; -2) $\in$ (d) $\Rightarrow n = -2$. Khi đó : $y = mx - 2$

Điểm (3; 5) $\in$ (d) $\Rightarrow m = \frac{7}{3}$

Vậy : $y = \frac{7}{3}x - 2 \Leftrightarrow 7x - 3y - 6 = 0$.

ĐỀ SỐ 5

1. Cho hai phương trình : $x + y = 2$ và $x - 2y = -1$. Tìm một cặp số (x; y) là nghiệm chung của hai phương trình.
2. Xác định hệ số góc và tung độ gốc của đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $3x - 2y = 6$.
3. Tìm m để cặp số (1; 2) là một nghiệm của phương trình :
 $2x + my = m + 1$. Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình với m vừa tìm được.

Giải

1. Nghiệm chung (x; y) của hai phương trình chính là tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng $x + y = 2$ và $x - 2y = -1$.

Viết lại : $x = 2 - y$ và $x = 2y - 1$.

Phương trình tung độ giao điểm của hai đường thẳng :

$$2 - y = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Từ đó tìm được $x = 1$.

Vậy nghiệm chung là cặp số (1; 1).

2. Viết lại : $y = \frac{3}{2}x - 3$

Ta có hệ số góc $a = \frac{3}{2}$; tung độ gốc $b = -3$.

3. Cặp số (1; 2) là nghiệm của phương trình, nên ta có :

$$2.1 + 2m = m + 1 \Rightarrow m = -1.$$

Vậy, ta có : $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$

Công thức nghiệm tổng quát : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x. \end{cases}$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình :

a) $2x + 3y = 6$

b) $0x - 2y = 4$

c) $3x + 0y = -3$.

2. a) Tìm m sao cho cặp số $(2; -3)$ là nghiệm của phương trình :

$$mx - 2y = 3.$$

b) Tương tự câu a) với cặp số $(5; -3)$ và phương trình $3x - my = 6$.

3. Cho hai phương trình : $2x - y = 5$ và $3x + 4y = 2$.

Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó.

4. a) Chứng tỏ cặp số $(0; 1)$ là nghiệm của phương trình $mx + 2y = 2$.

b) Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $mx + y = m - 1$.

5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

a) $4x - 3y = 11$

b) $5x + 3y = 2$.

Hướng dẫn

1. a)
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = -1. \end{cases}$$

2. a) $m = -\frac{3}{2}$

b) $m = -3$.

3. Tọa độ giao điểm : $(2; -1)$.

4. b) Điểm cố định : $(1; -1)$.

5. a) Ta có : $y = \frac{4x - 11}{3} \Leftrightarrow y = x - 3 + \frac{x - 2}{3}$.

§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
- Hai hệ phương trình gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ mx + y = 3. \end{cases}$$

2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

a) Minh họa hình học tập nghiệm của mỗi phương trình trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định nghiệm của hệ.

Giải

1. Viết lại hệ : $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 3 \\ y = -mx + 3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Hai đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - 3$ và

$y = -mx + 3$ cắt nhau $\Leftrightarrow -m \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}.$

2. a) Vẽ đường thẳng $(d_1) : y = -3x + 5$

Bảng giá trị :

x	0	2
y	5	-1

Đường thẳng (d_1) qua hai điểm :

$A(0; 5)$ và $B(2; -1).$

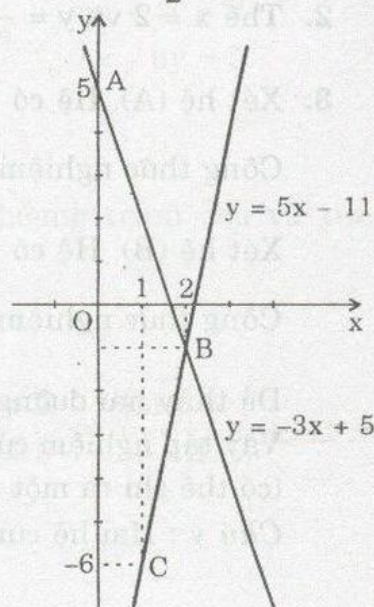
Vẽ đường thẳng $(d_2) : y = 5x - 11$

Bảng giá trị :

x	1	2
y	-6	-1

Đường thẳng (d_2) qua hai điểm :

$C(1; -6)$ và $B(2; -1).$



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$-3x + 5 = 5x - 11 \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2 \Rightarrow y = -1.$

Vậy nghiệm của hệ là $(2; -1).$

ĐỀ SỐ 2

1. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm : $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ mx + 3y = 5. \end{cases}$

2. Tìm m và n để hệ phương trình : $\begin{cases} mx - y = 5 \\ nx + my = 4 \end{cases}$ có một nghiệm là $(2; -1).$

3. Hai hệ phương trình sau có tương đương không ?

$$(A) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad (B) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$$

Giải

1. Viết lại hệ :
$$\begin{cases} y = 4x - 3 & (d_1) \\ y = -\frac{m}{3}x + \frac{5}{3} & (d_2) \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song

$$\begin{cases} -\frac{m}{3} = 4 \\ -3 \neq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -12.$$

2. Thế $x = 2$ và $y = -1$ vào hệ đã cho, ta được :
$$\begin{cases} 2m + 1 = 5 \\ 2n - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3. \end{cases}$$

3. Xét hệ (A). Hệ có vô số nghiệm.

Công thức nghiệm tổng quát :
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1. \end{cases}$$

Xét hệ (B). Hệ có vô số nghiệm.

Công thức nghiệm tổng quát :
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Dễ thấy hai đường thẳng $y = x - 1$ và $y = 2x - 1$ không trùng nhau. Vậy tập nghiệm của hai hệ khác nhau nên hai hệ không tương đương (có thể chỉ ra một nghiệm (2; 1) thỏa (A) mà không thỏa (B)).

Chú ý : Hai hệ cùng vô nghiệm thì tương đương với nhau.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho phương trình $3x - y = 5$. Hãy cho thêm một phương trình để được một hệ có nghiệm duy nhất.

2. Hai hệ phương trình sau có tương đương không ?

$$(A) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad (B) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm :
$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ mx + y = -3. \end{cases}$$

Giải

1. Ta có : $3x - y = 5 \Leftrightarrow y = 3x - 5$

Chẳng hạn $y = x$. Khi đó hai đường thẳng $y = 3x - 5$ và $y = x$ có hệ số góc khác nhau nên chúng cắt nhau.

Vậy hệ : $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

2. Hệ (A) vô nghiệm vì hai đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = -x + \frac{1}{2}$

song song với nhau.

Tương tự hệ (B) vô nghiệm.

Vậy hai hệ tương đương.

3. Viết lại hệ : $\begin{cases} y = 4x - 3 & (d_1) \\ y = -mx - 3 & (d_2) \end{cases}$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trùng nhau $\Leftrightarrow 4 = -m \Leftrightarrow m = -4$.

ĐỀ SỐ 4

1. Tìm m, n để cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ mx + ny = 5. \end{cases}$

2. Tìm m để hệ sau vô nghiệm : $\begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

3. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình sau và tìm nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Giải

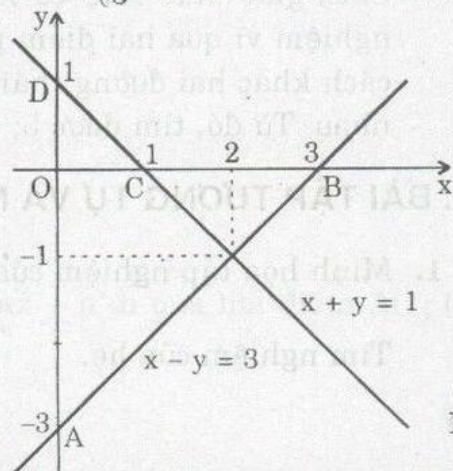
1. Thế $x = 2; y = -1$ vào hệ, ta được : $\begin{cases} 2m - 4 = 2 \\ 2m - n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1. \end{cases}$

2. Viết lại hệ : $\begin{cases} y = -\frac{m}{3}x + \frac{5}{3} & (d_1) \\ y = 4x - 3 & (d_2) \end{cases}$

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{3} = 4 \\ \frac{5}{3} \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -12$.

3. Viết lại hệ : $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

- Đường thẳng $(d_1) : y = x - 3$ qua hai điểm : $A(0; -3)$ và $B(3; 0)$.
Đường thẳng $(d_2) : y = -x + 1$ qua hai điểm : $C(0; 1)$ và $D(1; 0)$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :



$x - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 2$. Ta tìm được $y = -1$.
 Vậy $(2; -1)$ là nghiệm của hệ.

ĐỀ SỐ 5

1. Tìm a, b để hệ : $\begin{cases} ax + y = 1 \\ bx + ay = -5 \end{cases}$ có nghiệm $(1; -1)$.
2. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình sau, giải thích vì sao ?

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ -x + y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
3. Tìm a, b, c biết rằng hệ phương trình : $\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ bx + y = c \end{cases}$ có hai nghiệm $(4; 0)$ và $(-2; -3)$.

Giải

1. Thế $x = 1; y = -1$ vào hệ, ta được : $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - a = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.
2. Viết lại hệ : $\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 & (d_1) \\ y = x - \frac{1}{2} & (d_2) \end{cases}$

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song. Vậy hệ vô nghiệm.

3. Thế $x = 4; y = 0$ vào phương trình thứ nhất, ta có : $4a = 4 \Rightarrow a = 1$.
 Thế $x = 4; y = 0$ vào phương trình thứ hai, ta có : $4b = c$ (1)
 Thế $x = -2; y = -3$ vào phương trình thứ hai ta có : $-2b - 3 = c$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4b = -2b - 3 (=c) \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Từ đó, tìm được : $c = -2$.

Đáp số : $a = 1; b = -\frac{1}{2}; c = -2$.

Cách giải khác : Hệ có hai nghiệm phân biệt nên hệ sẽ có vô số nghiệm vì qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng hay nói cách khác hai đường thẳng biểu diễn bởi mỗi phương trình là trùng nhau. Từ đó, tìm được $b; c$ sau khi đã có $a = 1$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Minh họa tập nghiệm của mỗi phương trình của hệ sau : $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$.
 Tìm nghiệm của hệ.

2. Đoán nhận số nghiệm của hệ sau bằng hình học :

a)
$$\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -3x + y = -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

3. a) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ mx - y = m + 2. \end{cases}$$

b) Tìm m để hệ sau vô nghiệm :
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ mx + y = m - 2. \end{cases}$$

4. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$(d_1) : x + y = 2; \quad (d_2) : 2x + 3y = 0; \quad (d_3) : mx + y = 2.$

5. Hai hệ sau có tương đương không :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2. \end{cases}$$

Hướng dẫn

1. Nghiệm : $(2; -1).$

2. a) Hai đường thẳng trùng nhau nên hệ có vô số nghiệm.

b) Hai đường thẳng cắt nhau nên hệ có nghiệm duy nhất.

3. a) $m \neq -1.$ b) $m = -1.$

4. (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $M(6; -4)$. Thế tọa độ M vào phương trình của (d_3) . Đáp số : $m = 1.$

5. Hai hệ cùng vô số nghiệm nhưng không tương đương vì hai tập nghiệm của mỗi hệ khác nhau.

§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Dùng quy tắc thế biến đổi hệ đã cho để được một hệ, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A(1; 0) và B(2; 1)

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có : } \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - x \\ 3x - 2(10 - x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - x \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (4; 6).

2. Thế tọa độ A và B vào phương trình $y = ax + b$, ta có hệ :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 2

$$1. \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ x + y = 12. \end{cases}$$

2. Tìm các hệ số a, b biết rằng hệ phương trình :

$$\begin{cases} ax + by = -5 \\ bx - ay = -5 \end{cases} \text{ có nghiệm là } (1; -2).$$

Giải

1. Điều kiện : $y \neq 0$. Hệ được đưa về dạng :

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x + 3x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (3; 9).

2. Vì (1; -2) là nghiệm của hệ, nên thế $x = 1; y = -2$ vào hệ, ta được :

$$\begin{cases} a - 2b = -5 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ b + 2(2b - 5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 3

$$1. \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 \\ x - y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2. \text{ Tìm các giá trị m để hệ sau có vô số nghiệm : } \begin{cases} 3x - 2y = 6 & (1) \\ mx + y = -3 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(1; 1 - \sqrt{2})$.

2. Từ (2) $\Rightarrow y = -mx - 3$. Thế y vào phương trình (1), ta được :

$$3x - 2(-mx - 3) = 6 \Leftrightarrow x(3 + 2m) = 0 \quad (*)'$$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Chú ý : Có thể xét điều kiện để hai đường thẳng trùng nhau.

ĐỀ SỐ 4

1. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx - 3my = 2m + 3 & (2) \end{cases}$$

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x = -\sqrt{3}y + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(-\sqrt{3}y + \sqrt{2}) - \sqrt{3}y = 1 \\ x = -\sqrt{3}y + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $\left(1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)$.

2. Từ (1) $\Rightarrow x = 1 - my$. Thế x vào phương trình (2), ta được :

$$m(1 - my) - 3my = 2m + 3 \Leftrightarrow -(m^2 + 3m)y = m + 3 \quad (*)$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m + 3) = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{-3}{x-y} + \frac{2}{2x+y} = -2 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{10}{2x+y} = 2. \end{cases}$$

2. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + y = m \\ x + my = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} ax + y = b \\ x - y = 2. \end{cases}$$

3. a) Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ mx - 4y = -5. \end{cases}$

b) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} (m-2)x + y = 3 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

4. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$$(d_1) : 2x + 3y = 7; \quad (d_2) : x - y = 6; \quad (d_3) : 3x + my = 13.$$

5. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - y = 2 - m \\ x + 2y = m + 1 \end{cases}$

có nghiệm $(x_0; y_0)$ và sao cho $x_0^2 + y_0^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

6. Giải hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - |y| = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} m|x| - y = m \\ |x| + my = 1. \end{cases}$$

Hướng dẫn

1. a) $(3; -3)$

$$b) \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$c) \text{ Đặt } u = \frac{1}{x-y}; v = \frac{2}{2x+y}. \text{ Đáp số : } \left(\frac{33}{8}; \frac{11}{4} \right).$$

2. a) Ta có : $-2mx + y = 5 \Rightarrow y = 2mx + 5.$

Thế vào phương trình $mx + 3y = 1$, ta được :

$$mx + 3(2mx + 5) = 1 \Leftrightarrow 7mx = -14 \quad (*)$$

• Nếu $m = 0$: $(*)$ vô nghiệm, khi đó hệ vô nghiệm.

• Nếu $m \neq 0$: $(*) \Leftrightarrow x = -\frac{2}{m}$. Hệ có nghiệm : $\left(-\frac{2}{m}; 1 \right)$

Đáp số : $m = 0$: hệ vô nghiệm.

$m \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất : $\left(-\frac{2}{m}; 1\right)$.

b) Ta có : $mx + y = m \Rightarrow y = -mx + m$.

Thế y vào phương trình $x + my = 1$, ta được :

$$x + m(-mx + m) = 1 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 1 - m^2$$

• Nếu $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Hệ có vô số nghiệm : $m = 1 : \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x \end{cases}; \quad m = -1 : \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1 \end{cases}$

• Nếu $1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $(1; 0)$.

c) • $a \neq -1$. Hệ có nghiệm : $\left(\frac{b+2}{a+1}; \frac{b-2a}{a+1}\right)$.

• $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$. Hệ có vô số nghiệm : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 2 \end{cases}$.

• $\begin{cases} a = -1 \\ b \neq -2 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

3. a) $m = -2$ b) $m \neq 3$.

4. $m = 2$.

5. $m = \frac{1}{17}$.

6. a) Xét hai trường hợp : $y \geq 0$ và $y < 0$. Đáp số : $(0; 1)$.

b) Đặt $u = |x| \geq 0$. Đáp số : $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Áp dụng quy tắc cộng đại số để được một hệ phương trình mới, trong đó một phương trình có hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3. \end{cases}$$
2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :
$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - my = 2. \end{cases}$$

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 10 \\ -10x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -11y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{16}{11} \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{11} \\ y = -\frac{16}{11} \end{cases}$$
2. Ta có :
$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - my = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 30y = 5 \\ 15x - 3my = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m - 30)y = -1 \quad (*) \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 3m - 30 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$.

ĐỀ SỐ 2

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10}. \end{cases}$$
2. Tìm a, b để hệ phương trình :
$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ 2ax - 3by = 6 \end{cases}$$
 có nghiệm là $(3; -2)$.

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - 4y = \sqrt{10} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 1 - 2\sqrt{10} \\ x = 2\sqrt{2}y + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5} \\ x = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm : $\left(\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}; \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5} \right)$.

2. Thế $x = 3; y = -2$ vào hệ đã cho, ta được :

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 6a + 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 4b = 6 \\ 6a + 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 3

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 3\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm :
$$\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ -2mx + y = 5. \end{cases}$$

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 3\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{2}x = 14 \\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm : $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

2. Ta có :
$$\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ -2mx + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 3y = 1 \\ -6mx + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -2 \quad (*) \\ -2mx + y = 5 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

ĐỀ SỐ 4

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3. \end{cases}$$

2. Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = mx + 2$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1) : 2x + 3y = 7$ và $(d_2) : 3x + 2y = 13$.

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}y = -2 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{7\sqrt{2} - 6}{2} \end{cases}$$

2. Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x + 6y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 25 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Thế $x = 5$; $y = -1$ vào phương trình $y = mx + 2$, ta được :

$$-1 = 5m + 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$$

ĐỀ SỐ 5

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{-3}{x-y} + \frac{2}{2x+y} = -2 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{10}{2x+y} = 2 \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ mx + 3y = 4 \end{cases}$$

Giải

1. Đặt $u = \frac{1}{x-y}$; $v = \frac{2}{2x+y}$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} -3u + v = -2 \\ 4u - 5v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -15u + 5v = -10 \\ 4u - 5v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11u = -8 \\ -3u + v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{8}{11} \\ v = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Vậy :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{8}{11} \\ \frac{2}{2x+y} = \frac{2}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \neq 0 \\ 2x+y \neq 0 \\ 8x-8y=11 \\ 2x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{8} \\ y = \frac{11}{4} \end{cases}$$

2. Viết lại hệ :

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{m}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau

$$\Leftrightarrow \frac{m}{3} \neq 2 \Leftrightarrow m \neq -6$$

C. BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ 21x - 6y = -3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 7x + 5y = 16 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1 \\ \frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1 \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

a)
$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - my = 2 \\ mx - y = 1 \end{cases}$$

3. a) Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - my = -3 \\ mx + 3y = 4 \end{cases}$$

có nghiệm (x; y) và $x < 0$; $y > 0$.

b) Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - my = 2 \end{cases}$$

có nghiệm (x; y) và $x < 0$; $y < 0$.

Hướng dẫn

1. a) $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ b) $(3; -1)$ c) $\left(\frac{13}{4}; 6\right)$ d) $\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

2. a) $m \neq 0$.

b) $m \neq -2$ (Xét trường hợp hệ có nghiệm duy nhất và có vô số nghiệm).

3. a) $-\frac{8}{3} < m < \frac{9}{4}$.

b) $10 < m < 12$.

§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

• **Bước 1.** Lập hệ phương trình :

- Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

• **Bước 2.** Giải hệ hai phương trình nói trên.

- **Bước 3. Trả lời :** Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể ?

Giải

Gọi x là thời gian để vòi thứ nhất chảy một mình thì đầy bể ($x > 0$)
 y là thời gian để vòi thứ hai chảy một mình thì đầy bể ($y > 0$).

Một giờ, mỗi vòi chảy được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (phần nước trong bể).

Vì cả hai vòi chảy cùng một lúc thì mất 4 giờ 48 phút hay $\frac{24}{5}$ giờ nên 1 giờ cả hai cùng chảy được $\frac{5}{24}$ bể.

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

Vòi thứ nhất chảy 3 giờ, vòi thứ hai chảy 4 giờ sẽ được $\frac{3}{4}$ bể, nên

ta còn có : $3 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$

Vậy ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$ ($u, v > 0$), ta có hệ :

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{24} \\ 3u + 4v = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + 3v = \frac{5}{8} \\ 3u + 4v = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Ta tìm được $x = 12$; $y = 8$ (thỏa điều kiện $x > 0$; $y > 0$)

Trả lời : Vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể trong 12 giờ, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể trong 8 giờ.

ĐỀ SỐ 2

Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số ấy bằng 12 và khi thay đổi thứ tự hai chữ số thì được một số lớn hơn số cũ là 18.

Giải

Gọi x, y là các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đã cho; $0 < x$; $y \leq 9$; $x, y \in \mathbb{N}$. Khi đó hai số có dạng $\overline{xy} = 10x + y$ và $\overline{yx} = 10y + x$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x - 18 = 10x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

Trả lời : Số cần tìm là 57.

ĐỀ SỐ 3

Hai xe cùng khởi hành một lúc ở hai tỉnh A và tỉnh B cách nhau 60km. Nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 1 giờ; nếu đi cùng chiều thì xe đi nhanh sẽ đuổi kịp xe kia sau 3 giờ. Tìm vận tốc mỗi xe.

Giải

Gọi x là vận tốc của xe đi nhanh, y là vận tốc của xe đi chậm ($x, y > 0$; $x > y$ và x, y tính bằng km/h).

Sau 1 giờ hai xe gặp nhau, nên ta có phương trình : $x + y = 60$

Sau 3 giờ mỗi xe đi được $3x$; $3y$ (km) và gặp nhau, nên ta có phương trình : $3x - 3y = 60$.

Vậy, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 3x - 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 180 \\ 3x - 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

($x = 40$; $y = 20$ thỏa mãn các điều kiện đã nêu)

Trả lời : Xe đi nhanh có vận tốc 40 (km/h), xe đi chậm có vận tốc 20 (km/h).

ĐỀ SỐ 4

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích tăng thêm 45m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Giải

Gọi x, y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ($x, y > 0$).

Chu vi của vườn là $2(x + y)$ (m), nên ta có phương trình :

$$2(x + y) = 34 \Leftrightarrow x + y = 17$$

Diện tích của vườn lúc đầu là xy (m^2); diện tích của vườn lúc sau là $(x + 3)(y + 2)$ (m^2).

Theo bài ra, ta có phương trình : $(x + 3)(y + 2) = xy + 45$

Vậy, ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = xy + 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 34 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$$

Trả lời : Chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn là 12 (m) và 5 (m).

ĐỀ SỐ 5

Hai loại quặng chứa 75% và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng có chứa 66% sắt.

Giải

Gọi x, y là khối lượng của mỗi loại quặng chứa 75% và 50% sắt ($x > 0; y > 0; x, y$ tính bằng tấn).

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 25 \\ 75\%x + 50\%y = 25.66\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{33}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 3x + 2y = 66 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ 3x + 2y = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Trả lời : Loại quặng 75% sắt cần 16 (tấn);

Loại quặng 50% sắt cần 9 (tấn).

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Một vật có khối lượng 124g và thể tích 15cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và kẽm, biết rằng 89g đồng có thể tích 10cm^3 và 7g kẽm có thể tích 1cm^3 .
2. Hai người cùng làm chung một công việc trong 4 ngày thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 9 ngày, rồi người thứ hai đến cùng làm trong 1 ngày nữa mới xong. Hỏi mỗi người làm một mình thì trong bao lâu sẽ xong công việc ?
3. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn dự định 10km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ; nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và quãng đường AB.

Hướng dẫn

1. Gọi số gam đồng và kẽm là x và y .

Ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 124 \\ \frac{10}{89}x + \frac{1}{7}y = 15 \end{cases}$$

Đáp số : Đồng : 89g; kẽm : 35g.

2. Đáp số : Người thứ nhất làm 12 ngày, người thứ hai làm 6 ngày.

3. Gọi x là số chuyến của xe thứ hai; y là số chuyến của xe thứ ba.

Ta có hệ :
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + x + y = 50 \\ 3x + 2,5x + 3y = 118 \end{cases}$$

Đáp số : Mỗi xe chở thứ tự là : 24; 16; 10 chuyến.

4. Đáp số : Vận tốc xe : 40 (km/h); thời gian dự định : 15 (h); quãng đường : 600 (km).

ÔN TẬP CHƯƠNG III

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. Tìm k để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ -5x + 6y = -23 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3x = 7. \end{cases}$$

3. Tìm m để hai đường thẳng $(d_1) : 3x + my = 3$ và $(d_2) : mx + 3y = 3$ song song với nhau.

4. Hai người cùng làm việc trong 15 giờ thì được $\frac{1}{6}$ công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai làm trong 20 giờ thì cả hai làm được $\frac{1}{5}$ công việc. Hỏi mỗi người làm riêng thì trong bao lâu sẽ làm xong.

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx + y = 1 & (1) \\ y = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Thế y từ (2) vào (1), ta được : $kx + x = 0 \Leftrightarrow (k + 1)x = 0 \quad (*)$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow k + 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1.$$

$$2. a) \begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ -5x + 6y = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 25y = -65 \\ -10x + 12y = -46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 37y = -111 \\ 2x + 5y = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ 2x + 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$b) \text{ Ta có : } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ y - 3(-2y + 4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{7} \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{7} \\ y = \frac{19}{7} \end{cases}$$

$$3. \text{ Ta xét hệ : } \begin{cases} 3x + my = 3 & (1) \\ mx + 3y = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x = \frac{3 - my}{3}$. Thế x vào (2), ta được :

$$m \cdot \frac{3 - my}{3} + 3y = 3 \Leftrightarrow (9 - m^2)y = 9 - 3m \quad (*)$$

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m^2 = 0 \\ 9 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy hai đường thẳng song song $\Leftrightarrow m = -3$.

4. Gọi x, y là thời gian để người thứ nhất và thứ hai làm một mình xong công việc ($x, y > 0$).

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc; người thứ hai làm

được $\frac{1}{y}$ công việc. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 12 \cdot \frac{1}{x} + 20 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$ ($u > 0, v > 0$). Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15u + 15v = \frac{1}{6} \\ 12u + 20v = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60u + 60v = \frac{2}{3} \\ 60u + 100v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40v = \frac{1}{3} \\ 12u + 20v = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{120} \\ u = \frac{1}{360} \end{cases}$$

Vậy : $x = 360$; $y = 120$.

Trả lời : Người thứ nhất làm xong công việc trong 360 giờ; người thứ hai làm xong công việc trong 120 giờ.

ĐỀ SỐ 2

1. Giải hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 6x + y = 7. \end{cases}$$

2. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 1. \end{cases}$

3. Hai hệ phương trình sau có tương đương với nhau không ?

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 140m. Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Giải

$$1. a) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - 2y) + 3y = 4 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 6 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(-7; 6)$.

$$b) \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 6x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{19}{4}. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $\left(\frac{3}{8}; \frac{19}{4}\right)$.

2. Ta có : $x + ay = 1 \Rightarrow x = 1 - ay$.

Thế x vào phương trình thứ nhất, ta được :

$$a(1 - ay) + y = a \Leftrightarrow (1 - a^2)y = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1 - a^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 + a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

3. Ta thấy mỗi hệ đã cho đều vô nghiệm vì trong mỗi hệ biểu thị cho hai đường thẳng song song, vậy hai hệ tương đương với nhau.

4. Gọi x, y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ($x > 0$; $y > 0$; x, y tính bằng m). Chu vi là 140m, nên ta có phương trình :

$$2(x + y) = 140 \Leftrightarrow x + y = 70$$

Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài 10m, nên ta có phương trình :

$$3y - x = 10$$

Vậy, ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 3y - x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 80 \\ x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 70 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \end{cases}$$

Trả lời : Chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 50m và 20m.

ĐỀ SỐ 3

1. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{3} \\ x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

2. Tìm a, b để đường thẳng (d) : $y = ax + b$ đi qua hai điểm A(2; -3) và B(-1; 4).

3. Tìm m để hệ sau vô nghiệm : $\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx + y = 2m & (2) \end{cases}$

4. Tổng hai số bằng 30. Hai lần số này nhỏ hơn bốn lần số kia là 12. Tìm hai số đó.

Giải

1. a) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{3} \\ x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{3})y = -(1 + \sqrt{3}) \\ x + y = -\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x + y = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(1 - \sqrt{3}; -1)$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = -26 \\ 6x + 15y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19y = 38 \\ 3x - 2y = -13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 3x - 2y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(-3; 2)$.

2. Thế tọa độ của A, B vào phương trình $y = ax + b$, ta có :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -7 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$$

3. Ta có : (1) $\Leftrightarrow x = 1 - my$. Thế x vào (2), ta được :

$$m(1 - my) + y = 2m \Leftrightarrow (1 - m^2)y = m \quad (*)$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

4. Gọi hai số lần lượt là x, y. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 12 = 4y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ 2x - 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 36 \\ x + y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Trả lời : Hai số cần tìm là 12 và 18.

ĐỀ SỐ 4

1. Giải hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ (1 + \sqrt{3})x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ \frac{x}{2} + \frac{5y}{4} = 2. \end{cases}$$

2. Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ ax + (a - 1)y = \frac{3}{2} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

3. Hai người cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 6 giờ; người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{3}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu sẽ xong.

Giải

$$\begin{aligned} 1. a) \text{ Ta có : } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ (1 + \sqrt{3})x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{6}y = -\sqrt{2} \\ (3 + \sqrt{3})x - \sqrt{6}y = \sqrt{6} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{3})x = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có : } \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 26 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(-1; 2)$.

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Ta có : } \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ ax + (a - 1)y = \frac{3}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ ax + (a - 1)y = \frac{3}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ (a - 1)y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a \end{cases} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

$$3. \text{ 7 giờ 12 phút} = \frac{36}{5} \text{ giờ.}$$

Gọi x, y là thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc ($x > 0, y > 0$; x, y tính theo giờ).

Một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

$$\text{Ta có hệ phương trình : } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$ ($u > 0, v > 0$). Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{36} \\ 6u + 3v = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + 3v = \frac{15}{36} \\ 6u + 3v = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{5}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Vậy $x = 12$; $v = 18$

Trả lời : Người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai làm một mình trong 18 giờ.

ĐỀ SỐ 5

1. Giải hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} \sqrt{3}x - (1 + \sqrt{2})y = -\sqrt{3} \\ (1 + \sqrt{3})x - (1 + \sqrt{2})y = \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$$

2. Tìm m, n để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2mx + 5y = 1 \\ -2x + ny = 4. \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ sau có vô số nghiệm : $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = -m. \end{cases}$

4. Một ô tô đi trên quãng đường AB với vận tốc 50km/h rồi tiếp tục đi từ B đến C với vận tốc 45km/h. Biết rằng quãng đường từ A đến C là 165km và thời gian đi từ A đến B ít hơn thời gian đi từ B đến C là $\frac{1}{2}$ giờ. Tính thời gian ô tô đi trên hai quãng đường AB và BC.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{3}x - (1 + \sqrt{2})y = -\sqrt{3} \\ (1 + \sqrt{3})x - (1 + \sqrt{2})y = \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x - (1 + \sqrt{2})y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10y = -14 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19y = 38 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất : $(1; 2)$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Giải hệ : } \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 2(3y - 1) + 3y = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Thế $x = 2$ và $y = 1$ vào hệ thứ hai, ta được :

$$\begin{cases} 4m + 5.1 = 1 \\ (-2).2 + n.1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 8. \end{cases}$$

Thử lại : $m = -1$ và $n = 8$, ta có hệ : $\begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(2; 1)$

Vậy với $m = -1$ và $n = 8$ thì hai hệ phương trình tương đương.

3. Từ phương trình : $-x + y = -m \Rightarrow y = x - m$.

Thế y vào phương trình thứ nhất, ta được :

$$mx - (x - m) = 1 \Leftrightarrow (m - 1)x = 1 - m \quad (*)$$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

4. Gọi x là thời gian ô tô đi từ A đến B ($x > 0$; x tính bằng giờ)

y là thời gian ô tô đi từ B đến C ($y > 0$; y tính bằng giờ).

Quãng đường AB bằng $50x$ (km); quãng đường BC bằng $45y$ (km).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ -50x + 50y = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 95y = 190 \\ y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Trả lời : Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{3}{2}$ giờ; thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 2 giờ.

B. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 7x + 5y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{13}{36} \\ \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{10}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$

2. Giải và biện luận hệ phương trình :

a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - ay = 2. \end{cases}$

3. a) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} ax + ay = a^2 \\ x + ay = 2. \end{cases}$

b) Tìm a để hệ sau có vô số nghiệm : $\begin{cases} x + 2ay = 1 \\ (a - 1)x + 4y = 2a - 3. \end{cases}$

c) Tìm a để hệ sau vô nghiệm : $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1. \end{cases}$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } \begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y = b \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \\ x + 4y = a \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 1 \\ ax - 4y = -6. \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn

1. a) $(3; -1)$

b) Đặt $u = \sqrt{x+3}$; $v = \sqrt{y+1}$. Đáp số: $(1; -1)$.

c) Đặt $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Đáp số: $(1296; 144)$.

2. a) $\begin{cases} ax + y = a^2 & (1) \\ x + ay = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow x = 1 - ay$.

Thế vào (1): $a - a^2y + y = a^2 \Leftrightarrow (1 - a^2)y = a^2 - a \quad (*)$

• Nếu $a \neq \pm 1$, ta có: $y = \frac{a}{a+1}$. Khi đó $x = \frac{a^2 + a + 1}{a+1}$

Hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{a^2 + a + 1}{a+1}; -\frac{a}{a+1} \right)$.

• Nếu $a = 1$: $(*) \Leftrightarrow 0y = 0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x. \end{cases}$

• Nếu $a = -1$: $(*) \Leftrightarrow 0y = 2$ (vô nghiệm)

Vậy $a = -1$: hệ vô nghiệm.

b) $a = 10$: hệ vô nghiệm.

$a \neq 10$: hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{12-a}{3(10-a)}; \frac{1}{3(10-a)} \right)$.

3. a) $a \neq 0$ và $a \neq 1$.

b) $a = 2$.

c) $a = -\frac{2}{3}$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol đi qua gốc tọa độ, nhận trục Oy làm trục đối xứng, O là đỉnh của parabol.
Nếu $a > 0$ thì parabol nằm phía trên trục Ox ; nếu $a < 0$ thì parabol nằm phía dưới trục Ox .

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

- Cho hàm số $y = ax^2$.
a) Xác định a , biết rằng đồ thị ($\mathcal{P}$) của hàm số đi qua điểm $A(2; -4)$.
b) Vẽ đồ thị của hàm số với a vừa tìm được ở câu trên.
- Cho hàm số : $y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2$. So sánh $f\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)$ và $f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}\right)$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = (m^2 + 1)x^2$.

Giải

- a) $A \in (\mathcal{P}) \Rightarrow -4 = a.(2)^2 \Rightarrow a = -1$

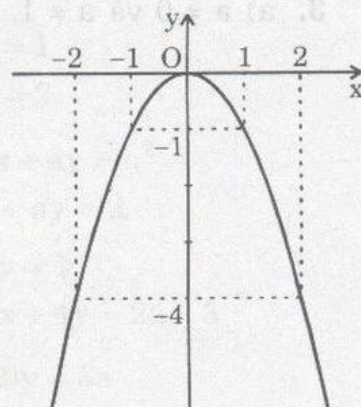
Ta có : $y = -x^2$.

- Vẽ đồ thị $y = -x^2$

Bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị ($\mathcal{P}$) của hàm số là một parabol có đỉnh là O và trục Oy là trục đối xứng (Xem hình vẽ).



2. Nếu $a = -\frac{3}{2} < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Vậy : $0 < \frac{2+\sqrt{5}}{4} < \frac{2+\sqrt{6}}{4} \Rightarrow f\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right) > f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}\right)$.

3. Ta có : $m^2 + 1 > 0$, với mọi m thuộc $\mathbb{R}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0, khi $x = 0$.

ĐỀ SỐ 2

1. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số khi x thỏa mãn $0 \leq x \leq 2$.

2. Tìm giá trị của m , biết rằng hàm số $y = (1 - m)x^2$ đồng biến khi $x > 0$.

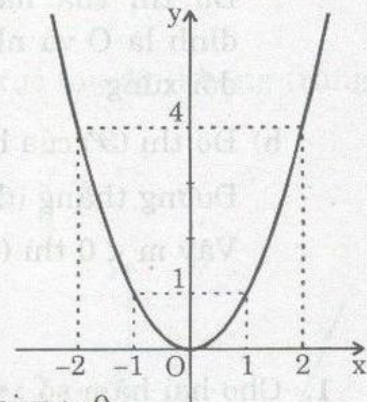
3. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2$. Tìm giá trị của m biết đồ thị ($\mathcal{P}$) của hàm số đi qua điểm $A(2; -4)$.

Giải

1. a) Bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị của hàm số là một parabol có đỉnh là O và nhận trục Oy làm trục đối xứng (hình vẽ).



b) Ta có $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $x > 0$.

Vậy $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi $x = 0$; giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, khi $x = 2$.

2. Hàm số đồng biến khi $x > 0 \Rightarrow 1 - m > 0 \Rightarrow m < 1$.

3. Ta có $A \in (\mathcal{P}) \Rightarrow -4 = (m - 1) \cdot 2^2 \Rightarrow m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0$.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho đồ thị hai hàm số $y = x^2$ ($\mathcal{P}$) và $y = 2x$ (d).

Tìm tọa độ giao điểm của ($\mathcal{P}$) và (d).

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$. Biết rằng điểm $M(m; -1)$ thuộc đồ thị của hàm số. Tìm m .

3. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

Giải

1. Phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

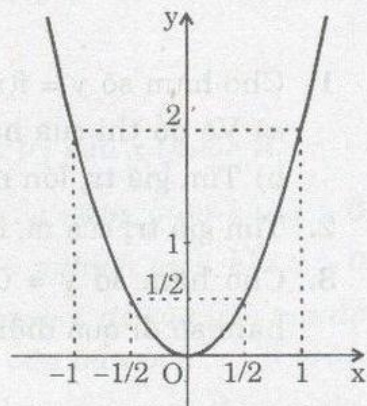
Ta có các giao điểm : $O(0; 0)$ và $M(2; 4)$.

2. a) $M(m; -1)$ thuộc đồ thị nên $-1 = -\frac{1}{4}m^2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

3. a) Bảng giá trị :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị của hàm số là parabol có đỉnh là O và nhận trục Oy làm trục đối xứng.



- b) Đồ thị $(\mathcal{P})$ của hàm số $y = 2x^2$ nằm phía trên của trục Ox.

Đường thẳng $(d) : y = m$ là đường thẳng song song với trục Ox.

Vậy $m < 0$ thì (d) và $(\mathcal{P})$ không cắt nhau.

ĐỀ SỐ 4

1. Cho hai hàm số : $y = x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Vẽ đồ thị $(\mathcal{P})$ và (d) của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và (d) (nếu có).

2. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - 2m + 3)x^2$. Chứng tỏ rằng hàm số đồng biến khi $x > 0$, từ đó hãy so sánh $f(\sqrt{2})$ và $f(\sqrt{5})$.

Giải

1. a) Bảng giá trị ($y = x^2$)

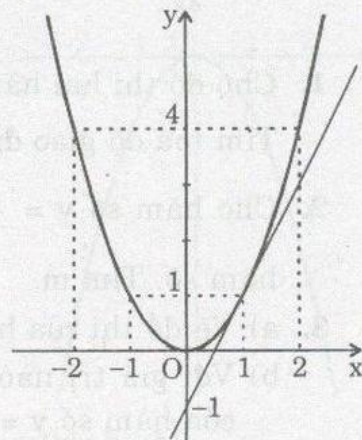
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị của hàm số là một parabol $(\mathcal{P})$.

- Bảng giá trị ($y = 2x - 1$)

x	0	1
y	-1	1

Đồ thị của hàm số là đường thẳng (d) qua hai điểm $(0; -1)$, $(1; 1)$.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy tọa độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và (d) là $M(1; 1)$.

2. Ta có : $m^2 - 2m + 3 = m^2 - 2m + 1 + 2$

$$= (m - 1)^2 + 2 > 0, \text{ với mọi } m \text{ (vì } (m - 1)^2 \geq 0)$$

Vậy hệ số $a > 0$, với mọi m nên hàm số đã cho đồng biến khi $x > 0$.

Ta có : $0 < \sqrt{2} < \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{5})$.

ĐỀ SỐ 5

Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị $(\mathcal{P})$ của hàm số.

b) Tìm trên $(\mathcal{P})$ những điểm cách đều hai trục tọa độ (không trùng với O).

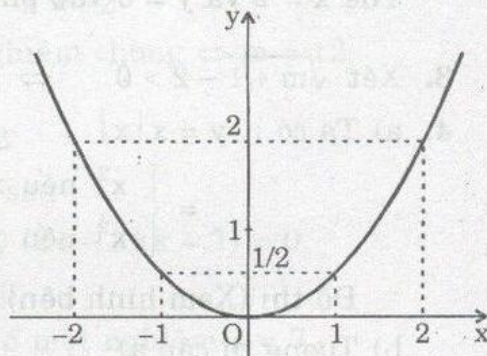
c) Tìm trên $(\mathcal{P})$ những điểm có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

Giải

a) Bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị của hàm số là parabol $(\mathcal{P})$.



b) Những điểm cách đều hai trục

tọa độ nằm trên hai đường phân giác : $y = x$ hoặc $y = -x$.

Xét phương trình : $\frac{1}{2}x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có hai điểm : $O(0; 0)$, $M(2; 2)$. Tương tự, ta có : $N(-2; 2)$.

Vậy có 2 điểm trên $(\mathcal{P})$, không trùng với O là $M(2; 2)$ và $N(-2; 2)$.

c) Gọi $A\left(x_0; \frac{9}{2}\right) \in (\mathcal{P}) \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 9 \Rightarrow |x_0| = 3$
 $\Rightarrow x_0 = \pm 3$.

Ta có hai điểm : $A_1\left(3; \frac{9}{2}\right)$ và $A_2\left(-3; \frac{9}{2}\right)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số :

a) $y = -2x^2$ và $y = -2$.

b) $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -x$.

2. Cho hai hàm số $y = (m + 1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

Tìm m biết rằng đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 2.

3. Cho hàm số $y = (\sqrt{m+1} - 2)x^2$. Tìm các giá trị m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.

4. Vẽ đồ thị của hàm số :

a) $y = x|x|$

b) $y = x^2 - x|x|$.

Hướng dẫn

1. a) Xét phương trình : $-2x^2 = -2$. Đáp số : $(\pm 1; -2)$.

b) Xét phương trình : $\frac{1}{4}x^2 = -x$. Đáp số : $(0; 0), (-4; 4)$.

2. Khi $x = 2 \Rightarrow y = 3$.

Thế $x = 2$ và $y = 3$ vào phương trình $y = (m + 1)x^2$. Ta có : $m = -\frac{1}{4}$.

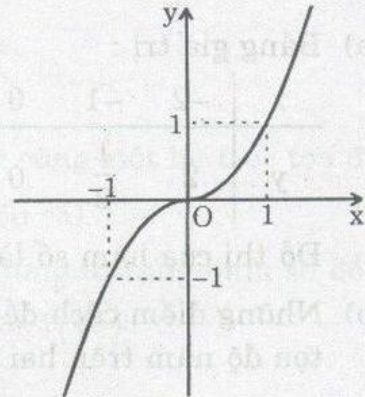
3. Xét $\sqrt{m+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

4. a) Ta có : $y = x|x|$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị (Xem hình bên).

b) Tương tự câu a).



§2. Phương trình bậc hai một ẩn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình bậc hai một ẩn có dạng : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Tìm a, b, c trong mỗi phương trình sau :

a) $x^2 - 2x = 0$

b) $2x^2 + x - \sqrt{2} = \sqrt{2}x + 1$.

2. Giải phương trình :

a) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$.

3. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung :

$x^2 - mx = 0$ (1) và $x^2 - 4 = 0$ (2).

Giải

1. a) $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$.

b) Ta có : $2x^2 + x - \sqrt{2} = \sqrt{2}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} - 1 = 0$

Vậy : $a = 2$; $b = 1 - \sqrt{2}$; $c = -\sqrt{2} - 1$.

2. a) $x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow |x - 3| = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \\ x - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$

3. Ta có : (1) $\Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung $\Leftrightarrow m = \pm 2$.

ĐỀ SỐ 2

1. Tìm a, b, c trong mỗi phương trình sau :

a) $(x - 2)(x + 3) = 0$

b) $(2x - 3)(x + 1) = 0$.

2. Cho phương trình : $x^2 + mx - 35 = 0$.

a) Tìm m, biết rằng phương trình có một nghiệm $x = 7$.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

3. Tìm m để phương trình $x^2 + m = 0$ có nghiệm.

Giải

1. a) Ta có : $(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

Vậy : $a = 1$; $b = 1$; $c = -6$.

b) Ta có : $(2x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$

Vậy : $a = 2$; $b = -1$; $c = -3$.

2. a) Vì $x = 7$ là một nghiệm của phương trình, nên ta có :

$7^2 + 7m - 35 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

b) Với $m = -2$, phương trình có dạng : $x^2 - 2x - 35 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 6 \\ x - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 7$; $x_2 = -5$.

3. Ta có : $x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m$. Vì $x^2 \geq 0$, nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Tìm p và q , biết rằng phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 4$.

2. Giải phương trình : $(x - 1)(x + 2) + 2 = 0$.

3. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hai hàm số sau :

$$y = x^2 \quad \text{và} \quad y = 4x - 3.$$

Giải

1. Thế $x = 3$; $y = 4$ vào phương trình đã cho, ta có hệ :

$$\begin{cases} 9 + 3p + q = 0 \\ 16 + 4p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ 9 + 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = 12. \end{cases}$$

2. $(x - 1)(x + 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (nếu có) :

$$\begin{aligned} x^2 = 4x - 3 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 4

1. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm : $x^2 + 2x - m = 0$.

2. Giải phương trình : $x^2 - 5x - 6 = 0$.

3. Tìm p , q để hai phương trình sau tương đương :

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + px + q = 0.$$

Giải

1. Ta có : $x^2 + 2x - m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - m = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = m + 1$$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Nhận xét : Nếu $m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$, phương trình có nghiệm.

$$\begin{aligned} 2. \quad x^2 - 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Ta có : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

• Nếu $x = \pm 2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ (*), ta có hệ

$$\begin{cases} 4 + 2p + q = 0 \\ 4 - 2p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) trở thành $x^2 - 4 = 0$ (đó chính là phương trình thứ nhất và hiển nhiên có hai nghiệm $x = \pm 2$).

Ta có thể xét bài toán sau :

Tìm p, q để hai phương trình $4x^2 + 4x - 3 = 0$ và $x^2 + px + q = 0$ tương đương.

Đáp số : $p = 1; q = -\frac{3}{4}$.

ĐỀ SỐ 5

1. Cho phương trình $x^2 + (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

Số nào sau đây là nghiệm của phương trình : $x = 1; x = -1; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$.

2. Giải phương trình : $x^2 - 5x + 7 = 0$.

3. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hai hàm số sau :

$$y = 4x^2 \quad \text{và} \quad y = 4x + 3.$$

Giải

1. Thay các giá trị $x = 1; x = -1; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$ vào phương trình đã cho, ta nhận thấy $x = -1$ và $x = -\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình.

(Chẳng hạn : với $x = -\sqrt{3}$, ta có : $(-\sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$
 $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} = 0$ (luôn đúng). Vậy $x = -\sqrt{3}$ là một nghiệm)

2. $x^2 - 5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

Phương trình vô nghiệm vì $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị :

$$4x^2 = 4x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 = 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x - 1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |2x - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là : $\left(\frac{3}{2}; 9\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho phương trình : $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$.

Số nào sau đây là nghiệm của phương trình : $x = 1$; $x = -1$; $x = \sqrt{2}$;
 $x = -\sqrt{2}$.

2. Hai phương trình sau đây có tương đương không :

a) $x^2 - 4 = 0$ và $x^2 - 4x + 4 = 0$.

b) $4x^2 + 4x - 3 = 0$ và $x^2 + \frac{1}{4} = 0$.

3. Tìm m và n để hai phương trình sau tương đương :

a) $x^2 - 1 = 0$ và $x^2 + mx + n = 0$.

b) $4x^2 + 4x - 3 = 0$ và $x^2 + mx + n = 0$.

4. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số :

a) $y = x^2$ và $y = 2x - 1$.

b) $y = 2x^2 + x$ và $y = 5x$.

5. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung :

a) $x^2 - 4 = 0$ và $x^2 - mx = 0$.

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ và $x^2 + mx + 6 = 0$.

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$ và $2x^2 + mx - 6 = 0$.

6. a) Tìm m để phương trình $x^2 + m - 4 = 0$ vô nghiệm.

b) Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn

1. $x = 1$ và $x = \sqrt{2}$ là hai nghiệm của phương trình.
2. a) Hai phương trình không tương đương vì $x = -2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$, mà không là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$.
b) Hai phương trình không tương đương.
3. a) $m = 0$; $n = -1$. b) $m = 1$; $n = -\frac{3}{4}$.
4. a) $(1; 1)$ b) $(0; 0); (2; 10)$.
5. a) $m = \pm 2$ b) $m = -7$ hoặc $m = 5$ c) $m = 4$.
6. a) $m > 4$ b) $|m| \geq 1$.

§3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Biệt thức : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình :

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$.

2. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m + 1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.
3. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Giải

1. a) $a = 2$; $b = -5$; $c = 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4}$ và $x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4}$

hay $x_1 = 2$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

b) $a = 1; \quad b = -(1 + \sqrt{2}); \quad c = \sqrt{2}$

$$\Delta = [-(1 + \sqrt{2})]^2 - 4 \cdot \sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1 - \sqrt{2})^2$$

Phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})}{2} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})}{2}$$

hay $x_1 = 1; \quad x_2 = \sqrt{2}.$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$

Nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-(2m + 1)}{2}$

Khi $m = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$

3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$
 $\Leftrightarrow 4 - 4(m - 2) > 0 \Leftrightarrow 12 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$

ĐỀ SỐ 2

1. Giải phương trình :

a) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 9x + 7 = 0.$

2. Tìm m để phương trình $x^2 + x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

3. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ vô nghiệm.

4. Giải và biện luận phương trình : $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0.$

Giải

1. a) $a = 2; \quad b = -7; \quad c = 2 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 49 - 16 = 33$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$ và $x_2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}.$

b) $a = 2; \quad b = 9; \quad c = 7 \Rightarrow \Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 81 - 56 = 25$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{25}}{4}$ và $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{25}}{4}$

hay $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{7}{2}.$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0$
 $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}.$

3. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}.$

4. Ta có : $a = 1$; $b = 2m$; $c = m^2 - 1$
 $\Rightarrow \Delta = (2m)^2 - 4.1.(m^2 - 1) = 4 > 0$
 Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = -m + 1$ và $x_2 = -m - 1$.

ĐỀ SỐ 3

1. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - ax - 2 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a .
2. Tìm m để đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 2mx + 4$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = -x^2 + 4x + 3$.

Giải

1. Ta có : $\Delta = a^2 + 8 > 0$, với mọi $a \in \mathbb{R}$ (vì $a^2 \geq 0$, với mọi a). Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (nếu có) :

$$x^2 = 2mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 4 = 0 \quad (*)$$

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 16 > 0$ (luôn đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$).

3. Ta có : $y = -x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y - 3 = 0$

Ta xem đây là phương trình bậc hai của x và y là tham số.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4(y - 3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 28 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 7.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 7. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi :

$$x^2 - 4x + 7 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

ĐỀ SỐ 4

1. Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm.
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $y = 2x^2$ (P) và đường thẳng $y = 5x + 3$ (d).
3. Tìm m để parabol $y = -x^2$ (P) và đường thẳng $y = x + m$ (d) tiếp xúc nhau.

Giải

1. Nếu $m \neq 0$:

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 4m(m + 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -12m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{12}.$$

Nếu $m = 0$: Ta có phương trình : $-x + 2 = 0$ (có nghiệm $x = 2$).

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$2x^2 = 5x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad x = 3 \Rightarrow y = 18$$

Tọa độ giao điểm : $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), (3; 18)$.

3. Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$-x^2 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x + m = 0 \quad (*)$$

$(\mathcal{P})$ và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$$\text{kép} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Tìm m để phương trình $x^2 - (m^2 + m)x - 2 = 0$ có nghiệm.
2. Viết phương trình đường thẳng qua điểm $(0; -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = 2x^2$ ($\mathcal{P}$).
3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Giải

1. Ta có các hệ số : $a = 1; c = -2$. Vì vậy $a.c = -2 < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$, hay $(m^2 + m)^2 + 8 > 0$, với mọi m .

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

2. Phương trình đường thẳng qua điểm $(0; -2)$ có tung độ góc bằng -2 là : $y = kx - 2$ (d)

Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$2x^2 = kx - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - kx + 2 = 0 \quad (*)$$

$(\mathcal{P})$ và (d) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 4$.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $(0; -2)$ và tiếp xúc với $(\mathcal{P})$ là :

$$y = \pm 4x - 2.$$

3. Mẫu số : $x^2 + 1 \neq 0$, với mọi x .

$$\text{Vậy : } y = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow yx^2 + y = x \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0 \quad (*)$$

Ta xem phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai của x , còn y là tham số.

- Nếu $y = 0$, phương trình (*) có nghiệm $x = 0$.
- Nếu $y \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

ĐỀ SỐ 6

1. Tìm m để phương trình $(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.
2. Tìm m để parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ ($\mathcal{P}$) và đường thẳng $y = mx + 1$ (d) tiếp xúc với nhau.
3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{x+1} - x$.

Giải

1. • Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Phương trình có dạng : $5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}$ (nghiệm duy nhất)

- Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 16m - 44 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{22}{3} \end{cases}$$

Đáp số : $m = 1$; $m = 2$; $m = -\frac{22}{3}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d) :

$$-\frac{1}{4}x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx + 4 = 0 \quad (*)$$

($\mathcal{P}$) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 16m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

3. Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $x \geq -1 \Rightarrow u \geq 0$.

Ta có : $u^2 = x + 1 \Rightarrow x = u^2 - 1$.

Vậy : $y = u - (u^2 - 1) \Leftrightarrow y = -u^2 + u + 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 1 + y = 0$

Phương trình ẩn u có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$ hay $x = -\frac{3}{4}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. a) Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m = 0$ có nghiệm kép.

c) Tìm m để phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ vô nghiệm.

2. a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) : $y = x - \frac{1}{2}$

và parabol ($\mathcal{P}$) : $y = \frac{x^2}{2}$ luôn luôn tiếp xúc nhau.

b) Tìm m để đường thẳng (d) : $y = mx - 1$ và parabol ($\mathcal{P}$) : $y = x^2$ tiếp xúc nhau.

3. a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) : $y = x - 2$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) : $y = mx + 1$ và parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{x^2}{4}$

cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

4. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2 + (p + 2m)x + q + mp = 0$ cũng có hai nghiệm phân biệt.

5. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{2x + 1} - x$.

b) Cho $a + b = 1$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

c) Cho $a + b = 1$. Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

d) Cho $2a + 3b = 5$. Chứng minh rằng : $2a^2 + 3b^2 \geq 5$.

e) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Hướng dẫn

1. a) Xét $m = 0$ và $m \neq 0$.

Khi $m \neq 0$, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq \frac{1}{12} \end{cases}$

Đáp số : $m \leq \frac{1}{12}$.

b) Đáp số : $m = 0$; $m = 4$.

c) Đáp số : $m > 4$.

2. a) Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\frac{x^2}{2} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ có nghiệm kép } x = 1.$$

Vậy hai đồ thị luôn tiếp xúc nhau.

b) Đáp số : $m = \pm 2$.

3. a) Đáp số : $(1; -1)$ và $(-2; -4)$.

b) Đáp số : $|m| > 1$.

4. Ta có : $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$; $\Delta_2 = p^2 - 4q + 4m^2 = \Delta_1 + 4m^2 > 0$.

5. a) Xem đề số 6 (bài 3). Đáp số : giá trị lớn nhất bằng 1, khi $x = 0$.

b) $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + (1 - a)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Cách khác : Đặt $m = a^2 + b^2$. Ta có : $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$

$$\text{Vậy } m = a^2 + (1 - a)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - m = 0$$

Phương trình bậc hai (ẩn số là a) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 8m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \text{ (đpcm).}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2 \\ &= a^2 - a(1 - a) + (1 - a)^2 = 3a^2 - 3a + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } m = 3a^2 - 3a + 1 \Leftrightarrow 3a^2 - 3a + 1 - m = 0$$

Phương trình bậc hai (ẩn số là a) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

d) Tương tự bài b).

$$\text{e) Ta có : } y = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

• $y = 0$, phương trình có nghiệm $x = 0$.

• $y \neq 0$, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

§4. Công thức nghiệm thu gọn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b'$; $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn:

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$.

2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + 2mx + 4 = 0$.

3. Tìm tọa độ giao điểm của parabol ($\mathcal{P}$): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 3$.

Giải

1. a) $a = 5$; $b = 2 \Rightarrow b' = 1$; $c = -16$. Vậy $\Delta' = b'^2 - ac = 81 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{8}{5}$.

- b) $a = 1$; $b = -2\sqrt{3} \Rightarrow b' = -\sqrt{3}$; $c = -6$. Vậy $\Delta' = 9 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 3 + \sqrt{3}; \quad x_2 = -3 + \sqrt{3}.$$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow |m| > 2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2. \end{cases}$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d):

$$x^2 = 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\Delta' = 4 > 0$. Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9; \quad x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1.$$

Vậy tọa độ hai giao điểm là: $(3; 9)$, $(-1; 1)$.

ĐỀ SỐ 2

1. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m + 5 = 0$ có nghiệm kép.
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $(\mathcal{P}) : y = -x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2x - 3$.
3. Cho $4x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $m = 4x^2 + y^2$.

Giải

1. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$
 $\Leftrightarrow (m - 1)^2 - (m + 5) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1. \end{cases}$

2. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$\Delta' = 4 > 0$. Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -1; \quad x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -9$$

Vậy tọa độ hai giao điểm là : $(1; -1), (-3; -9)$.

3. Ta có : $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$

$$\text{Khi đó } m = 4x^2 + (1 - 4x)^2 \Leftrightarrow 20x^2 - 8x + 1 - m = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 20m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m bằng $\frac{1}{5}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \frac{1}{5} \text{ và } y = \frac{1}{5}.$$

ĐỀ SỐ 3

1. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình $mx^2 + 2(m + 1)x + m + 3 = 0$ có nghiệm.
3. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $m = x + y$.

Giải

1. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 - (m - 3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \text{ với mọi } m \text{ (vì } \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ với mọi } m)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.

2. • $m = 0$, ta có phương trình $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $m = 0$, phương trình có nghiệm.

$$\begin{aligned} \bullet \quad m \neq 0, \text{ phương trình có nghiệm} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 1 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Đáp số : Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 1$.

3. Ta có : $m = x + y \Rightarrow y = m - x$

Vậy $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (m - x)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |m| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ĐỀ SỐ 4

1. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Chứng tỏ rằng parabol ($\mathcal{P}$) : $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = x - 1$ luôn luôn tiếp xúc nhau. Tìm tiếp điểm.
3. Tìm m để parabol ($\mathcal{P}$) : $y = mx^2$ ($m \neq 0$) và đường thẳng (d) : $y = 2x - 1$ tiếp xúc với nhau.

Giải

1. Ta có : $\Delta' = m^2 + 1 > 0$, với mọi m vì $m^2 \geq 0$ với mọi m .

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

2. Xét phương trình hoành độ điểm chung (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d) :

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép $x = 2$.

Vậy ($\mathcal{P}$) và (d) tiếp xúc nhau tại điểm (2; 1).

3. Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d) :

$$mx^2 = 2x - 1 \quad (m \neq 0) \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 1 = 0 \quad (m \neq 0) \quad (*)$$

($\mathcal{P}$) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

$$\text{kép} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Giải phương trình : $(1 + \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$.
2. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
3. Tìm m để parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = mx - 2m - 1$ tiếp xúc với nhau.

Giải

1. $\Delta' = (\sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 1 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$; $x_2 = -1$.

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m - 1)^2 - m(m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$$

3. Xét phương trình hoành độ điểm chung (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d) :

$$-\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 \quad (*)$$

($\mathcal{P}$) và (d) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

a) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ b) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

2. Tìm m để mỗi phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

a) $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + m - 1 = 0$

b) $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$.

3. Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm kép :

a) $(m - 1)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$

b) $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + m - 5 = 0$.

4. a) Tìm m để parabol ($\mathcal{P}$) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2mx - 2m - 3$ tiếp xúc với nhau.

b) Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x$.

Viết phương trình của đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) và tiếp xúc với parabol ($\mathcal{P}$).

Hướng dẫn

1. a) $x_1 = 1; x_2 = 2\sqrt{2} - 1$. b) $x_1 = 1; x_2 = 1 - \sqrt{2}$.
2. a) $m > -2$ b) $m > -1$.
3. a) Không có giá trị của m . b) $m = \frac{1}{13}$.
4. a) Phương trình $x^2 = 2mx - 2m - 3$ có nghiệm kép $m = -1; m = 3$.
b) Phương trình đường thẳng : $y = -x - \frac{1}{2}$.

§5. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý Vi-ét

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\text{thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ứng dụng

1. • Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$

thì phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$

thì phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (điều kiện : $S^2 - 4P \geq 0$).

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Tìm m để phương trình có nghiệm và tính tổng và tích các nghiệm theo m : $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$.
2. Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tính $x_1^2 + x_2^2$.
3. Tìm m để phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm khác dấu.

Giải

1. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0$ (luôn đúng với mọi m).

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$x_1 + x_2 = 2m - 2; \quad x_1 \cdot x_2 = m - 3.$$

2. Ta có các hệ số : $a = 1; b = -1; c = -10$ nên $ac < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$
Vậy phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 và

$$x_1 + x_2 = 1; \quad x_1 \cdot x_2 = -10.$$

Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 21.$

3. Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi

$$P = ac < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

(Khi $ac < 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$ nên không cần điều kiện $\Delta > 0$).

ĐỀ SỐ 2

1. Không giải phương trình, chứng tỏ phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính $x_1^3 + x_2^3$.
2. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và cùng dương.
3. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải

1. Ta có các hệ số : $a = 2; b = -3; c = -6$.

Vì $ac = 2 \cdot (-6) < 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; \quad x_1 x_2 = -3$$

Vậy $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{135}{8}.$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt và cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

3. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1 x_2 = m$.

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } x_1 x_2 = m &\Leftrightarrow 5 \cdot (-7) = m \\ &\Leftrightarrow m = -35 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \leq 1). \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 3

1. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm cùng dương.
2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 - x_2 = 4$.
3. Tìm hai số a và b biết $a + b = -1$ và $ab = -6$.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Điều kiện bài toán } &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 6 \geq 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ 2(m-1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 + 2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m > \frac{5}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1 x_2 = m$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Vậy } m = 0.$$

3. Nếu $a + b = -1$ và $ab = -6$ thì a, b là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là -3 và 2 .

ĐỀ SỐ 4

1. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2 .
2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm khác dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

Giải

$$1. \text{ Ta có: } (-1) + 2 = 1 = S; \quad (-1) \cdot 2 = -2 = P$$

Vậy -1 và 2 là nghiệm phương trình bậc hai: $x^2 - x - 2 = 0$.

2. Phương trình có hai nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow P = m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Ta có :

$$|x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

(vì $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ không xảy ra vì x_1, x_2 khác dấu)

$$\text{Vậy : } x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m < 3.)$$

ĐỀ SỐ 5

1. Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$, ở đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Giải

1. Phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có $a = 1; c = -3 \Rightarrow ac = -3 < 0$ nên luôn có hai nghiệm (khác dấu) $x_1, x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1; x_1 x_2 = -3$

$$\text{Ta có : } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Vậy $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình sau :

$$X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3X^2 - X - 1 = 0.$$

2. a) Ta có : $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0$, với mọi m vì $(m - 1)^2 \geq 0$ với mọi m .

b) Vì $\Delta' > 0$, với mọi m nên phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2m; \quad x_1 x_2 = 2m - 3$

$$\text{Vậy } A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 4m + 6$$

$$= (2m - 1)^2 + 5 \geq 5$$

Giá trị nhỏ nhất của A bằng 5. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 6

1. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$.
 - a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
 - b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$.
2. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$, ở đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Giải

1. a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow m > 1$.

b) Với $m > 1$, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

Khi đó $A = x_1x_2 - x_1 - x_2 = x_1x_2 - (x_1 + x_2) = m^2 - 3m + 1$

$$= \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $-\frac{5}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

2. Vì $a = 1; c = -1 \Rightarrow ac < 0$, nên phương trình luôn luôn có hai nghiệm. Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = -1$

Vậy : $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

ĐỀ SỐ 7

1. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
2. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm khác dấu.
3. Tìm m để hai phương trình sau tương đương :
 $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$.

Giải

1. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó : } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow m = -5$$

Thử lại : với $m = -5$, ta có phương trình : $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$a = 1$; $c = -3 \Rightarrow ac < 0$. Vậy phương trình có nghiệm (khác dấu).

(Nếu tìm điều kiện $\Delta' > 0$ trước và xét $x_1^2 + x_2^2 = 10$ sau thì không cần thử lại).

2. Phương trình có hai nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

3. Trường hợp 1 : Hai phương trình cùng vô nghiệm (điều này không xảy ra vì phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có $a = 1$; $c = -2 \Rightarrow ac < 0$ nên luôn có nghiệm).

Trường hợp 2 : Hai phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ \Delta_2' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 \geq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

$$\text{Khi đó, hai phương trình tương đương} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m = 2 \\ -2 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Đáp số : $m = -2$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m - 1)x - 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 = 9$.
2. Tìm m để phương trình $x^2 + (m - 1)x + 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.
3. Tìm m để phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Tìm m để phương trình $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm khác dấu.
5. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn : $x_1 < 1 < x_2$.
6. Tìm m để hai phương trình sau tương đương :
 - a) $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$.
 - b) $x^2 + 2x + m = 0$ và $x^2 + mx + 2 = 0$.

Hướng dẫn

1. $m = \pm\sqrt{2}$ (xem đề số 7).
2. $m = 6$; $m = 2$ (xem đề số 7).
3. $m = 2$ (xem đề số 5).

4. $m < 3$ (xem đề số 1).

5. Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Thế vào phương trình, ta được :

$$(t + 1)^2 - 3(t + 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + m - 3 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

6. $\frac{1}{4} < m < 2$ (xem đề số 7).

§6. Phương trình quy về phương trình bậc hai

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$. Ta có phương trình : $at^2 + bt + c = 0$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu :

- Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- Quy đồng mẫu thức chung hai vế và khử mẫu thức.
- Giải phương trình vừa tìm được.
- Đối chiếu điều kiện với các giá trị của ẩn vừa tìm được.

3. Phương trình chứa căn thức bậc hai :

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình : $9x^4 + 2x^2 - 32 = 0$.

2. Không giải phương trình, chứng tỏ phương trình $x^4 + 2x^2 - 5 = 0$ luôn có hai nghiệm khác dấu.

3. Giải phương trình : $\frac{4x}{x+1} + \frac{x+3}{x} = 6$.

Giải

1. Đặt $t = x^2; t \geq 0$. Ta có phương trình :

$$9t^2 + 2t - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{9} \\ t = -2 \end{cases}$$

Vì $t \geq 0$ nên ta chọn $t = \frac{16}{9}$. Vậy $x^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3}$.

2. Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình : $t^2 + 2t - 5 = 0$
 $a = 1$; $c = -5 \Rightarrow ac < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm khác dấu
 $t_1 < 0 < t_2$. Khi đó phương trình trùng phương đã cho có hai nghiệm
 $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = \sqrt{t_2}$. Ta có x_1 và x_2 khác dấu.

$$3. \text{ Ta có : } \frac{4x}{x+1} + \frac{x+3}{x} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ 4x^2 + (x+3)(x+1) = 6x(x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 2

1. Không giải phương trình, hãy cho biết số nghiệm của phương trình
 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
2. Giải phương trình :
- a) $x^2 + x - 2 = |x|$ b) $\sqrt{x-1} = x-3$.

Giải

1. Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình : $t^2 - 5t + 4 = 0$ (*).

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \Delta = 9 > 0 \\ P = 4 > 0 \\ S = 5 > 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương, nên phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

2. a) $x^2 + x - 2 = |x|$ (*)

• Nếu $x \geq 0$, ta có : (*) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = x \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vì $x \geq 0$, ta lấy $x = \sqrt{2}$.

• Nếu $x < 0$, ta có : (*) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = -x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

Vì $x < 0$, ta lấy $x = -1 - \sqrt{3}$

Đáp số : $x = \sqrt{2}$; $x = -1 - \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

ĐỀ SỐ 3

1. Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 + m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.
2. Giải phương trình :

a) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$

b) $|x^2 - 3x + 2| = x$.

Giải

1. Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình : $t^2 - 2t + m - 1 = 0$ (*)

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ m - 1 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

$$2. a) \sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 4 - 6x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 2x^2 + 14x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

b) Ta có : $|x^2 - 3x + 2| = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x \\ x^2 - 3x + 2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ (thỏa điều kiện $x \geq 0$)

(2) vô nghiệm vì $\Delta' = -1 < 0$.

ĐỀ SỐ 4

1. Tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có đúng ba nghiệm.
2. Giải phương trình :

a) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2 - x$

b) $(x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$.

Giải

1. Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình : $t^2 - 3t + m - 1 = 0$.

Nếu $t = 0$ là một nghiệm của phương trình trên, ta có :

$$0^2 - 3 \cdot 0 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Thử lại : Với $m = 1$, phương trình trên có dạng :

$$t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

Khi đó, ta có ba nghiệm của phương trình trùng phương :

$$x = 0; \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy $m = 1$.

$$2. a) \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9x + 1 = 4 - 4x + x^2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

b) Đặt $t = |x + 1|$; $t \geq 0$. Ta có phương trình :

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } |x + 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 5

$$1. \text{ Giải phương trình : } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = 1.$$

$$2. \text{ Giải phương trình : } x^2 - 4x + 3|x - 2| + 6 = 0.$$

$$3. \text{ Giải phương trình : } 2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} + 2 = 0.$$

Giải

$$1. \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x - 2 + 2(x + 1) = (x + 1)(x - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}.$$

$$2. \text{ Đặt } t = |x - 2|; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 4x = t^2 - 4$$

$$\text{Ta có phương trình : } t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \text{ (vô nghiệm vì } t \geq 0).$$

$$3. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 6}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow 2t^2 = 2x^2 - 6x + 12 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 2t^2 - 12$$

$$\text{Ta có phương trình : } 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } x^2 - 3x + 6 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

a) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

b) $x^4 + 17x^2 + 52 = 0.$

2. Giải phương trình :

a) $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$

b) $x^2 - 5|x| + 6 = 0.$

3. Giải phương trình :

a) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$

b) $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1.$

Hướng dẫn

1. a) $x = \pm \frac{2}{3}$

b) vô nghiệm.

2. a) Điều kiện : $x + 4 \geq 0$. Ta có : $x^2 - 5x + 4 = \pm(x + 4)$

Đáp số : $x = 0$; $x = 6$.

b) Đặt $|x| = t$; $t \geq 0$. Đáp số : $x = \pm 2$; $x = \pm 3$.

3. a) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2x \frac{x}{x-1} = 8$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - 8 = 0$$

Đặt $y = \frac{x^2}{x-1}$. Đáp số : $x = 2$; $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

b) Chia tử, mẫu của hai phân thức ở vế trái cho x , ta được :

$$\frac{2}{3x + \frac{2}{x} - 1} - \frac{7}{3x + \frac{2}{x} + 5} = 1 \quad (x = 0 \text{ không thỏa phương trình})$$

Đặt $y = 3x + \frac{2}{x}$. Đáp số : $x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$.

§7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình :

- Lập phương trình : Chọn ẩn số và tìm điều kiện thích hợp của ẩn số. Biểu thị các đại lượng khác qua ẩn số. Lập phương trình.
- Giải phương trình.
- Đối chiếu kết quả.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc đội được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu chiếc ? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có trọng lượng như nhau.

Giải

Gọi x (xe) là số xe ban đầu (x nguyên, $x > 3$).

Khi đó mỗi xe phải chở : $\frac{36}{x}$ (tấn).

Vì có thêm 3 xe, nên số xe hiện có là $x + 3$, nên mỗi xe lúc này phải chở là : $\frac{36}{x + 3}$ (tấn). Ta có phương trình :

$$\begin{aligned}\frac{36}{x} - \frac{36}{x + 3} &= 1 \Leftrightarrow 36(x + 3) - 36x = x(x + 3) \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ (nhận)} \\ x = -12 \text{ (loại)} \end{cases}\end{aligned}$$

Trả lời : Số xe lúc đầu là 9 (xe).

ĐỀ SỐ 2

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất là 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Giải

Gọi thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ) ($x > 0$) thì thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể là $x + 5$ (giờ).

Khi đó, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy

được $\frac{1}{x+5}$ bể và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{6}$ bể.

Vậy, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow 6(x+5) + 6x = x(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ.

Vòi thứ hai chảy đầy bể trong 15 giờ.

ĐỀ SỐ 3

Quãng đường AB dài 90km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải

Ta có : 27 phút = $\frac{9}{20}$ (giờ)

Sau 1 giờ hai xe gặp nhau nên tổng vận tốc của hai xe bằng 90 (km/h).

Gọi x là vận tốc của xe thứ nhất ($x > 0$; x tính bằng km/h)

thì vận tốc của xe thứ hai là $90 - x$ (km/h) ($x < 90$).

Thời gian của xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (giờ).

Thời gian của xe thứ hai là $\frac{90}{90-x}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\frac{90}{x} - \frac{90}{90-x} = \frac{9}{20}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 490x + 18000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (nhận)} \\ x = 450 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vận tốc của xe thứ nhất là 40 (km/h); vận tốc của xe thứ hai là 50 (km/h).

ĐỀ SỐ 4

Một tổ học sinh chuyển 105 bó sách về thư viện. Đến buổi lao động có hai học sinh bị ốm không tham gia được, vì vậy mỗi người phải chuyển thêm 6 bó nữa mới hết số sách trên. Hỏi số học sinh trong tổ là bao nhiêu ?

Giải

Gọi số học sinh trong tổ là x (người) ($x \in \mathbb{N}^*$).

Mỗi người cần chuyển $\frac{105}{x}$ (bó sách).

Vì vắng hai người nên còn $x - 2$ người ($x > 2$) và mỗi người cần chuyển $\frac{105}{x-2}$ (bó sách).

Theo bài ra, ta có phương trình : $\frac{105}{x-2} - \frac{105}{x} = 6$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 12x - 210 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Số học sinh trong tổ lúc đầu là 7 (người).

ĐỀ SỐ 5

Người ta hòa tan 4 gam chất lỏng thứ nhất với 3 gam chất lỏng thứ hai để được hỗn hợp dung dịch có khối lượng riêng là 70g/cm^3 .

Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là 20g/cm^3 . Tính khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai.

Giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x (\text{g/cm}^3)$ ($x > 0$).

Khi đó khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $x + 20 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của 4g chất lỏng thứ nhất là $\frac{4}{x+20} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của 3g chất lỏng thứ hai là $\frac{3}{x} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{7}{70} = \frac{1}{10} (\text{cm}^3)$.

Ta có phương trình : $\frac{4}{x+20} + \frac{3}{x} = \frac{1}{10}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 50x - 600 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ (nhận)} \\ x = -10 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $60 (\text{g/cm}^3)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Sau khi đi được nửa quãng đường, xe tăng vận tốc thêm 10km mỗi giờ và về đến nơi sớm hơn 30 phút so với dự định. Tính vận tốc dự định của xe, biết quãng đường AB dài 120km .

Giải

1. a) Ta có : $a = 1; c = -7 \Rightarrow ac = -7 < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$
 $\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm khác dấu x_1, x_2 .

b) Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 5; x_1x_2 = -7$

Vậy : $x_1^2 + x_2^2 = 5^2 - 2(-7) = 39$

Tương tự : $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{39}{49}$

2. a) Đặt $t = x^2; t \geq 0$. Ta có phương trình :

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & (\text{nhận}) \\ t = -2 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy : $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{2x-1} = x-2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=1 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5. \end{aligned}$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của $(\mathcal{P})$ và (d) :

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0 \quad (*)$$

(d) cắt $(\mathcal{P})$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

4. Gọi x là vận tốc của ô tô lúc đi ($x > 0$; x tính bằng km/h), thì vận tốc lúc về sẽ là $x + 25$ (km/h).

Thời gian lúc đi là $\frac{150}{x}$ (giờ), thời gian lúc về là $\frac{150}{x+25}$ (giờ).

Ta có phương trình :

$$\frac{150}{x} + \frac{150}{x+25} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 35x - 750 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 & (\text{nhận}) \\ x = -15 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Trả lời : Vận tốc của ô tô lúc đi là 50 (km/h).

ĐỀ SỐ 2

1. Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$ theo m .

2. Giải phương trình :

a) $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$

b) $7\sqrt{x} - 2x + 15 = 0$.

3. Tìm tọa độ giao điểm của parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng

(d) : $y = \frac{1}{2}x - 2$.

4. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và sau 5 giờ 50 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng một vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu mới đầy bể.

Giải

1. a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - 2m > 0$
 $\Leftrightarrow m < 1$.

b) Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2m - 2$; $x_1x_2 = m^2 - 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) &= 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 \\ &= 4(m^2 - 1) + 2(2m - 2) + 1 \\ &= 4m^2 + 4m - 7.\end{aligned}$$

2. a) Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình :

$$2t^2 + 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Đặt $t = \sqrt{x}$; $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x$. Ta có phương trình :

$$7t - 2t^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $x = 25$.

3. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của ($\mathcal{P}$) và (d) :

$$-\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

• Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$

• Với $x = -4 \Rightarrow y = -4$

Vậy tọa độ hai giao điểm là $(2; -1)$ và $(-4; -4)$.

4. Gọi x là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể ($x > 0$, x tính bằng giờ) thì thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể là $x + 4$.

Một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+4}$ (bể).

Ta có : 5 giờ 50 phút = $\frac{35}{6}$ (giờ).

Khi đó cả hai vòi chảy 1 giờ được $\frac{6}{35}$ (bể).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{6}{35}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 23x - 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{7}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 14 giờ.

ĐỀ SỐ 3

1. Giải phương trình :

a) $(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1} = 0$

b) $25x^4 + 21x^2 - 4 = 0$

c) $4x^4 - 9 = 0$.

2. Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + m$. Tìm m để (d) và ($\mathcal{P}$) tiếp xúc với nhau.

3. Cho phương trình : $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 8$.

4. Một ca nô chạy từ A đến B và trở về hết tất cả 3 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi đi từ A đến B, biết vận tốc lúc đi hơn lúc về là 15km/h và đoạn sông dài 30km.

Giải

1. a) Ta có : $(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$. Ta có phương trình :

$$25t^2 + 21t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{4}{25} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 = \frac{4}{25} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{5}$$

$$c) 4x^4 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2. Phương trình hoành độ điểm chung (nếu có) của (P) và (d) :

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0 \quad (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$
 $\Leftrightarrow 10 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 5$.

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 x_2 = \frac{m-3}{2}$

$$\text{Khi đó : } x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{m-3}{2} = 8 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (nhận).}$$

4. Gọi x là vận tốc lúc đi của ca nô ($x > 0$, x tính bằng km/h), vận tốc lúc về sẽ là $x - 15$ (km/h) ($x > 15$).

$$\text{Ta có phương trình : } \frac{30}{x} + \frac{30}{x-15} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 35x + 150 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ (nhận)} \\ x = 5 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vận tốc lúc đi của ca nô là 30 (km/h).

ĐỀ SỐ 4

1. Giải phương trình :

$$a) x^2 - 2 = 5\sqrt{x^2 - 2} - 6$$

$$b) \sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1.$$

2. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m - 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 0$.

3. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4. Cho parabol (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua điểm $M(-1; 1)$ và (d) tiếp xúc với (P).

5. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài và có diện tích bằng 507m^2 . Tính chu vi của khu vườn.

Giải

1. a) Đặt $u = \sqrt{x^2 - 2}$, điều kiện $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}; u \geq 0 \Rightarrow u^2 = x^2 - 2$

Ta có phương trình: $u^2 = 5u - 6 \Leftrightarrow u^2 - 5u + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \text{ (nhận)} \\ u = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}$

• $x^2 - 2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

• $x^2 - 2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$

b) $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 1 + 4x - x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

2. Phương trình có nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9$.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m - 8$

Xét hệ: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

Khi đó: $x_1 x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m - 8 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = 8\frac{3}{4} \text{ (nhận)}.$

3. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 \geq 0$ (luôn đúng với mọi m vì $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$)

Ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2m + 2 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ bằng $\frac{7}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

4. Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

$M \in (d) \Rightarrow 1 = -a + b \Rightarrow b = 1 + a$. Vậy: $y = ax + a + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) :

$$-\frac{1}{2}x^2 = ax + a + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 2a + 2 = 0 \quad (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng (d) : $y = (1 \pm \sqrt{3})x + 2 \pm \sqrt{3}$.

5. Gọi x là chiều dài của khu vườn ($x > 0$; x tính bằng m), thì chiều rộng là $\frac{1}{3}x$. Ta có phương trình :

$$\frac{1}{3}x \cdot x = 507 \Leftrightarrow x^2 = 1521 \Leftrightarrow x = \pm 39$$

Vì $x > 0$, nên ta lấy $x = 39$. Khi đó chu vi là : $2\left(39 + \frac{1}{3} \cdot 39\right) = 104 \text{ (m)}$

Trả lời : Chu vi là 104 (m).

ĐỀ SỐ 5

1. Giải phương trình :

a) $(9 - x^2)\sqrt{2 - x} = 0$

b) $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 4} = 6$.

2. Tìm m để parabol (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx - 2m - 1$

tiếp xúc với nhau.

Tìm tọa độ tiếp điểm.

3. Tìm m để phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7$.

4. Một xe ô tô đi từ A đến B cách nhau 80km. Vì khởi hành chậm 16 phút so với dự định nên phải tăng vận tốc thêm 10km/h so với dự định, vì vậy ô tô đến đúng giờ. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Giải

$$1. a) (9 - x^2)\sqrt{2 - x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - x = 0 \\ 9 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 2 \\ x = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$b) \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 4} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{(x - 1)(x + 4)} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 4 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -8 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

2. Phương trình hoành độ điểm chung (nếu có) của (P) và (d) :

$$-\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 \quad (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{Khi } m = -1 : (*) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy tọa độ tiếp điểm là (2; -1).

$$\begin{aligned} 3. \text{ Phương trình có nghiệm } x_1, x_2 &\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |m| \geq 2 \end{aligned}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = -m$; $x_1 x_2 = 1$

$$\text{Vậy : } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 7 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 7$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3 \text{ (nhận).}$$

4. Gọi x là vận tốc dự định của xe ($x > 0$; x tính bằng km/h).

Thời gian dự định là $\frac{80}{x}$ (giờ). Khi tăng thêm 10km/h thì thời gian

đi hết quãng đường là $\frac{80}{x+10}$ (giờ). Ta có phương trình :

$$\frac{80}{x} = \frac{80}{x+10} + \frac{4}{15} \quad (16 \text{ phút} = \frac{4}{15} \text{ giờ})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ (nhận)} \\ x = -60 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vận tốc dự định là 50 (km/h).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

a) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

b) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

c) $\sqrt{1+3x} = x+1$

d) $\frac{3x-2}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{(2x-1)^3}$

e) $\frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2\sqrt{x}-x}$

2. Cho phương trình : $x^2 - 2x + m - 2 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

3. Cho phương trình : $x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .
 - Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Cho phương trình : $x^2 - (2m + 3)x + m - 3 = 0$.
- Chứng tỏ phương trình luôn luôn có nghiệm.
 - Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.
5. Tìm m để đường thẳng (d) : $y = \frac{3}{2}x + 2m$
cắt parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{3}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt.
6. Cho phương trình : $x^2 - 3(m + 1)x + 2m^2 - 18 = 0$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.
 - Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.
Tìm m sao cho $|x_1 - x_2| \leq 5$.
7. Cho phương trình : $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$.
Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều âm.
8. Tìm m để hai phương trình : $x^2 + x + m = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.
9. Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 25cm và tổng hai cạnh góc vuông bằng 35cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.
10. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 80m và có diện tích bằng $375m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của miếng đất.

Hướng dẫn

- $x = \pm 1$
 - $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4)$
 $x = 0; \quad x = 1; \quad x = 4.$
 - $x = 0; \quad x = 1.$
 - Điều kiện : $x > \frac{1}{2}$. Quy đồng mẫu số, ta có : $4x^2 - 7x + 3 = 0$
 $x = 1; \quad x = \frac{3}{4}.$
 - $x = 16.$
- $m \leq 3$
 - $m = -1.$
- với mọi $m \in \mathbb{R}.$
 - $m = 3.$

$$4. b) (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 4m^2 + 8m + 21 \\ = 4(m + 1)^2 + 17 \geq 17$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| \geq \sqrt{17}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$;

giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$ bằng $\sqrt{17}$.

$$5. m < \frac{3}{8}.$$

$$6. a) \Delta = (m + 9)^2 \geq 0, \text{ với mọi } m \in \mathbb{R}.$$

Ta có hai nghiệm : $x_1 = 2m + 6$; $x_2 = m - 3$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 6 < 0 \\ m - 3 < 0 \\ 2m + 6 \neq m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \neq -9. \end{cases}$$

$$b) -14 \leq m \leq -4.$$

$$7. m < -3 \text{ (xem bài 6).}$$

8. Giả sử x_0 là một nghiệm chung của hai phương trình.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x_0^2 + x_0 + m = 0 \\ x_0^2 + mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được :

$$x_0 + m - mx_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\bullet x_0 = 1 \Rightarrow m = -2$$

Ta có hai phương trình : $x^2 + x - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + 1 = 0$

Dễ thấy hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

$$\bullet m = 1. \text{ Ta có hai phương trình thành : } x^2 + x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

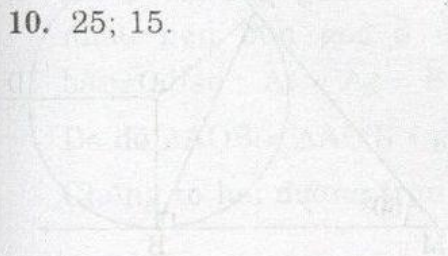
Đáp số : $m = -2$.

9. Gọi x là một cạnh góc vuông ($x > 0$ và $x < 25$), thì cạnh góc vuông kia là $35 - x$. Theo định lí Pi-ta-go, ta có phương trình :

$$x^2 + (35 - x)^2 = 625$$

Đáp số : 20; 15.

$$10. 25; 15.$$



PHẦN HÌNH HỌC

Chương III.

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§1. Góc ở tâm – Số đo cung

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm đường tròn.
- Số đo của cung nhỏ AB (kí hiệu $sđ\widehat{AB}$) bằng số đo độ của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo độ của cung lớn AB bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ.
- Số đo độ của nửa đường tròn bằng 180° .

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo độ.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn thì gọi là cung lớn hơn.

Định lí : Nếu C là một điểm nằm trên cung AB và chia cung AB thành hai cung AC và CB thì : $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho đường tròn (O) dây cung AB . Tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M . Biết $\widehat{AMB} = 50^\circ$.

- Tính số đo cung AB .
- Trên nửa mặt phẳng bờ OB (không chứa điểm A), kẻ đường thẳng d qua O và song song với BM , d cắt (O) tại D . Tính số đo cung AD .

Giải

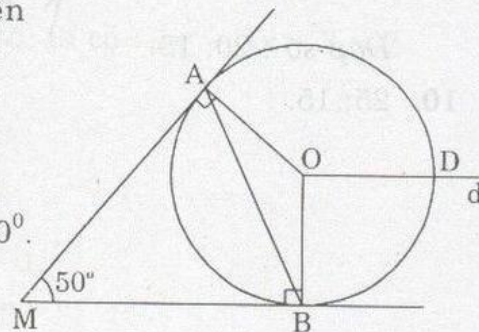
- MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) nên

$$MA \perp OA \text{ và } MB \perp OB.$$

Xét tứ giác $AOBM$ có :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 360^\circ - (\widehat{MAO} + \widehat{MBO} + \widehat{AMB}) \\ &= 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 50^\circ) = 130^\circ.\end{aligned}$$

$$sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AOB} = 130^\circ.$$



b) Ta có : $\text{sđ}\widehat{ADB} = 360^\circ - \text{sđ}\widehat{AB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

Mặt khác $OD \parallel BM$ mà $BM \perp OB \Rightarrow OD \perp OB$

hay $\text{sđ}\widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \text{sđ}\widehat{AD} = \text{sđ}\widehat{ADB} - \text{sđ}\widehat{BD} = 230^\circ - 90^\circ = 140^\circ$.

ĐỀ SỐ 2

Cho đường tròn $(O; R)$. Một điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC đến (O) (A, B là hai tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$.

b) Tính số đo cung nhỏ và cung lớn BC .

Giải

a) AB là tiếp tuyến của $(O; R)$ nên $AB \perp OB$.

$\triangle ABO$ vuông tại B có :

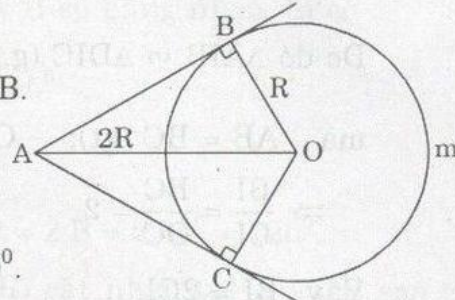
$$OA = 2R, \quad OB = R \text{ (gt)}$$

nên là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{BOC} = 2\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{hay } \widehat{BOC} = 120^\circ.$$

b) Ta có : $\widehat{BOC} = 120^\circ \text{ (cmt)} \Rightarrow \text{sđ}\widehat{BC} = 120^\circ$
 $\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BmC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.



ĐỀ SỐ 3

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Biết rằng hai cung nhỏ AB của hai đường tròn này có số đo (độ) bằng nhau. Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau.

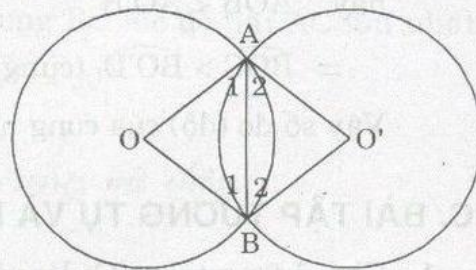
Giải

Ta có : Hai cung nhỏ AB của hai đường tròn này có số đo (độ) bằng nhau $\Rightarrow \text{sđ}\widehat{AOB} = \text{sđ}\widehat{AO'B}$

Mặt khác các tam giác AOB và $AO'B$ có hai góc ở đỉnh bằng nhau nên bốn góc ở đáy cũng bằng nhau : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

$$\text{Do đó } \triangle AOB = \triangle AO'B \text{ (g.c.g)} \Rightarrow OA = O'A$$

Chứng tỏ hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau.



ĐỀ SỐ 4

Cho $\triangle ABC$ đều. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BC. Lấy D thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{CD} = 60^\circ$. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng : $BI = 2CI$.

Giải

Gọi O là tâm của nửa đường tròn đường kính BC.

Ta có $\widehat{CD} = 60^\circ$ (gt) nên $\triangle OCD$ đều

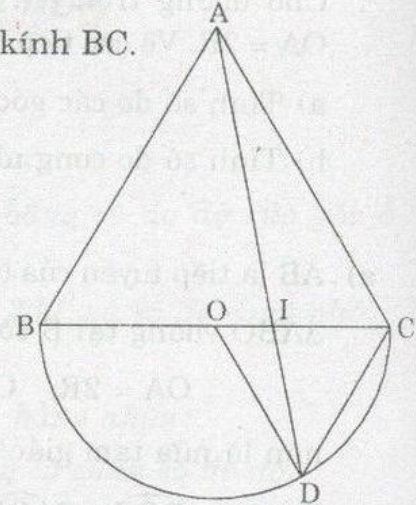
$$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ABC} = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \triangle AIB \sim \triangle DIC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{AB}{CD}$$

$$\text{mà } AB = BC \text{ (gt); } CD = OC (= R)$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{BC}{OC} = 2$$

$$\text{Vậy } BI = 2CI.$$



ĐỀ SỐ 5

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AOC và AO'D. Hãy so sánh số đo (độ) của hai cung nhỏ BC và BD của hai đường tròn, biết rằng $R > R'$.

Giải

Ta có : $R > R'$ (gt) hay $AO > AO'$.

Do đó, xét $\triangle AOO'$, ta có :

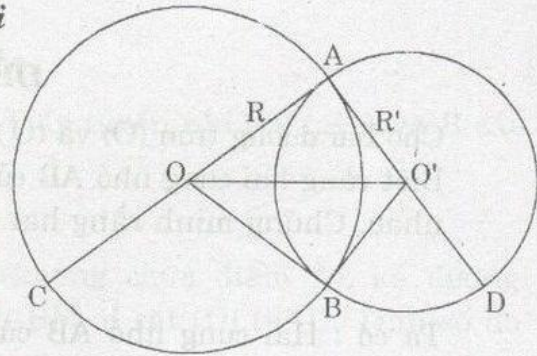
$$\widehat{AOO'} < \widehat{AO'O}$$

$$\Rightarrow 2\widehat{AOO'} < 2\widehat{AO'O}$$

$$\text{hay } \widehat{AOB} < \widehat{AO'B}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} > \widehat{BO'D} \text{ (cùng bù)}$$

Vậy số đo (độ) của cung nhỏ BC lớn hơn số đo (độ) của cung nhỏ BD.



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài sao cho $OM = 2R$. Vẽ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm). Gọi P, Q là giao điểm của (O) với MO (P nằm giữa M và O).

a) Tính số đo (độ) của góc AOQ.

b) Tính số đo (độ) của cung nhỏ AQ và cung lớn AQ.

Hướng dẫn :

a) $\triangle MAO$ là nửa tam giác đều (vì tam giác vuông MAO có $OM = 2R$; $OA = R$)

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{MOA} = 60^\circ \Rightarrow \text{sđ}\widehat{AOQ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{b) } \text{sđ}\widehat{AQ} = 120^\circ; \quad \text{sđ}\widehat{APQ} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ.$$

2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 3 : 4 : 5$. Vẽ đường tròn (A; AC) và đường tròn (B; BC) chúng cắt nhau ở D. Tính góc ở tâm $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBD}$.

Hướng dẫn : Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3 + 4 + 5} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ, \quad \widehat{B} = 60^\circ, \quad \widehat{C} = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 2.\widehat{A} = 2.45^\circ = 90^\circ; \quad \widehat{CBD} = 2.\widehat{B} = 2.60^\circ = 120^\circ.$$

3. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R) cắt nhau tại A và B sao cho khoảng cách giữa hai tâm lớn hơn R. Nối OA cắt (O') tại C. Tia OO' cắt (O') tại D (O' nằm giữa O và D). Chứng minh : $\widehat{CO'D} = 3\widehat{AOD}$.

Hướng dẫn : Ta có $\widehat{CO'D} = \widehat{OCO'} + \widehat{COO'}$ (góc ngoài của $\triangle OCO'$)

$$\triangle AO'C \text{ cân} \Rightarrow \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$$

$$\text{mà } \widehat{O'AC} = \widehat{AOO'} + \widehat{AO'O} \text{ (góc ngoài của } \triangle AOO').$$

4. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Phân giác của góc $\widehat{OBO'}$ cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm tương ứng C, D. Hãy so sánh các góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{BO'D}$.

Hướng dẫn : Sử dụng các tam giác cân OBC và O'BD.

5. Cho đường tròn (O; R) dây cung $AB = R\sqrt{3}$, C là điểm di động trên cung lớn AB. Xác định số đo (độ) cung BC lúc độ dài AC lớn nhất.

Hướng dẫn : $AC \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{BC} = 60^\circ$.

§2. Liên hệ giữa cung và dây

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- a) Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau : Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

Đảo lại : Hai dây bằng nhau trương hai cung bằng nhau.

b) Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau :

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- Dây lớn hơn trương cung lớn hơn.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho $\triangle ABC$ đều. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC. Lấy D, E trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AD, AE với BC. Chứng minh rằng : $BI = IJ = JC$.

Giải

Ta có : $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$ (gt)

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BD} = \text{sđ}\widehat{DE} = \text{sđ}\widehat{EC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BOD} = 60^\circ$$

Do đó $\triangle BOD$ đều (cân có một góc 60°)

$$\Rightarrow \widehat{OBD} = 60^\circ$$

Xét $\triangle BID$ và $\triangle CIA$ có :

$$\widehat{BID} = \widehat{CIA} \text{ (đối đỉnh)}$$

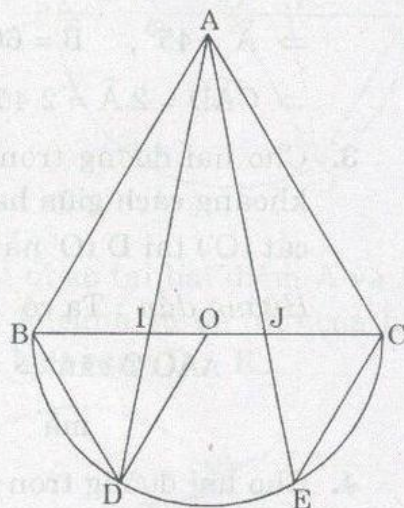
$$\widehat{OBD} = \widehat{ICA} = 60^\circ$$

Vậy $\triangle BID \sim \triangle CIA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{BD}{CA} = \frac{OB}{BC} = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } BD = OB \text{ và } CA = BC)$$

$$\Rightarrow BI = \frac{1}{3}BC. \text{ Tương tự, ta chứng minh được } CJ = \frac{1}{3}BC.$$

Do đó : $BI = IJ = JC$.



ĐỀ SỐ 2

Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle BDC$. Từ O lần lượt kẻ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a) Chứng minh $OH > OK$.

b) So sánh hai cung nhỏ $\widehat{BD}$ và $\widehat{BC}$.

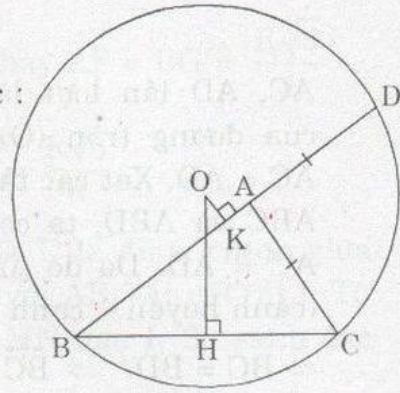
Giải

a) Trong $\triangle ABC$, theo bất đẳng thức tam giác :

$$\begin{aligned} BC &< AB + AC = AB + AD \\ &= BD \quad (\text{vì } AC = AD) \end{aligned}$$

$\Rightarrow OH > OK$ (định lý liên hệ giữa dây cung và khoảng cách đến tâm).

b) Vì $BC < BD$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BC} < \widehat{BD}$.



ĐỀ SỐ 3

Trên dây cung AB của một đường tròn (O), có hai điểm C và D chia dây này ba đoạn bằng nhau : $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng các điểm E và F chia cung nhỏ AB thành ba cung $\widehat{AE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FB}$ thỏa mãn điều kiện : $\widehat{AE} = \widehat{FB} < \widehat{EF}$.

Giải

$\triangle AOB$ cân ($OA = OB$) $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

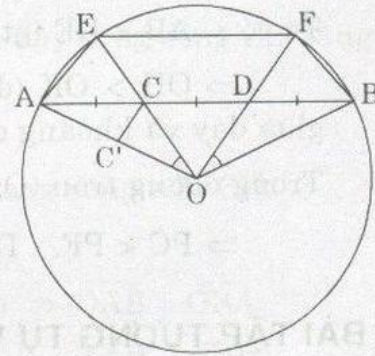
$$AO = BO \text{ (gt)}$$

$$AC = DB \text{ (gt)}$$

Vậy $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \text{ và } OC = OD$$

$$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF}$$



Vì D nằm trong đường tròn $\Rightarrow OA > OD$.

Từ C vẽ $CC' \parallel OD$. Khi đó CC' là đường trung bình của $\triangle AOD$

$$\Rightarrow CC' = \frac{OD}{2} \text{ và } C'O = \frac{AO}{2}$$

$$\widehat{C'CO} = \widehat{COD} \text{ (so le trong)}$$

Ta có : $CC' < C'O \Rightarrow \widehat{AOC} < \widehat{C'CO}$ hay $\widehat{AOC} < \widehat{COD}$

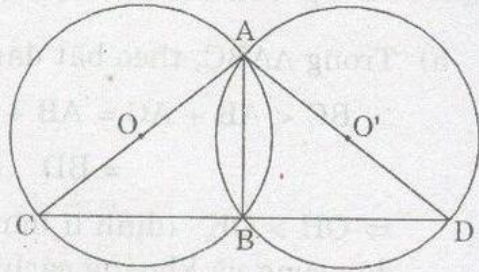
$$\Rightarrow \widehat{AE} < \widehat{EF}.$$

ĐỀ SỐ 4

Cho hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau và cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Kẻ các đường kính AOC và AO'D. Hãy so sánh các cung $\widehat{BC}$ và $\widehat{BD}$ của (O) và (O').

Giải

AC, AD lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và (O') nên $AC = AD$. Xét các tam giác vuông ABC và ABD, ta có : AB chung, $AC = AD$. Do đó $\triangle ABC = \triangle ABD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)



$$\Rightarrow BC = BD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} \text{ và } \widehat{CAB} = \widehat{DAB}.$$

ĐỀ SỐ 5

Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; R'). Lấy điểm P trên (O; R) kẻ hai tia Px và Py không đi qua O và cắt hai đường tròn lần lượt tại A, B, C (A, B $\in$ (O; R')) và D, E, F (E, D $\in$ (O; R')). Biết rằng $AB < DE$. Chứng minh rằng : $\widehat{PC} < \widehat{PF}$.

Giải

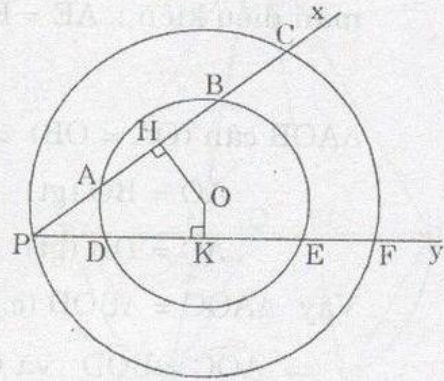
Kẻ $OH \perp AB$ tại H và $OK \perp DE$ tại K.

Ta có : $AB < DE$ (gt)

$\Rightarrow OH > OK$ (định lí liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm)

Trong đường tròn (O; R) có $OH > OK$

$$\Rightarrow PC < PF. \text{ Do đó } \widehat{PC} < \widehat{PF}.$$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho đường tròn (O; R) và cung $\widehat{AB}$ bằng 120° . Trên cung AB lấy các điểm C, D, E sao cho $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EB}$, các tia OC, OD, OE lần lượt cắt AB theo thứ tự tại F, H, G. Tính độ dài AF, FH, HG, GB.

Hướng dẫn : Ta có $\widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EB} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOB} = 30^\circ$$

$\triangle AOB$ cân có $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 30^\circ \Rightarrow \triangle AFO$ cân tại F.

Kẻ đường cao FI có : $IA = IO = \frac{AO}{2} = \frac{R}{2}$.

$\triangle AIF$ là nửa tam giác đều.

$$\text{Đặt } AF = x \Rightarrow FI = \frac{x}{2}. \text{ Theo định lí Py-ta-go : } x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Giải phương trình ẩn x, ta được : $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ hay $AF = BG = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

ΔOFG đều có $OF = AF = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow FH = GH = \frac{R\sqrt{3}}{6}$.

2. Cho đường tròn $(O; R)$ dây AB không qua O . C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Vẽ đường kính vuông góc với AB , cắt AB tại I . Từ điểm M bất kì trên cung nhỏ AB , vẽ dây MN qua I . So sánh các cung $\widehat{ACB}$ và $\widehat{MCN}$.

Hướng dẫn : Vẽ $OH \perp MN$ có $OH \leq OI \Rightarrow MN \geq AB$
 $\Rightarrow \widehat{MCN} > \widehat{ACB}$.

3. Cho đường tròn (O) và dây cung AB không qua O . Lấy M bất kì trên AB sao cho $MA < MB$. Đường vuông góc với AB tại M cắt cung AB tại C . Chứng minh : $\widehat{AC} < \widehat{CB}$.

Hướng dẫn : $MA < MB \Rightarrow AC < CB$ (đường xiên, hình chiếu)
 $\Rightarrow \widehat{AC} < \widehat{CB}$.

4. Chứng minh rằng hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

Hướng dẫn :

- + Trường hợp 1 : Tâm O nằm ngoài hai dây song song AB, CD .

Vẽ đường kính $EF \parallel AB$ và CD , ta có :

$$\widehat{OAB} = \widehat{AOE} \text{ và } \widehat{OBA} = \widehat{BOF} \Rightarrow \Delta OAB \text{ cân} \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} \\ \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF}. \text{ Tương tự : } \widehat{CE} = \widehat{DF}$$

$$\text{Do đó : } \widehat{AE} - \widehat{CE} = \widehat{BF} - \widehat{DF} \text{ hay } \widehat{AC} = \widehat{BD}.$$

- + Trường hợp 2 : Tâm O nằm giữa hai đường thẳng song song (các bạn tự chứng minh).

5. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và dây CD không qua O sao cho C ở giữa A và D và $AC = CD = DB$. Chứng minh $ACDB$ là hình thang và tính diện tích hình thang đó.

$$\text{Hướng dẫn : } AC = CD = DB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB} \\ \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOB} = 60^\circ$$

$$\text{Do đó các tam giác } AOC, COD, DOB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{DCO} = 60^\circ \\ \Rightarrow CD \parallel AB.$$

Chứng tỏ ACDB là hình thang cân (hình thang nội tiếp đường tròn).

Vẽ đường cao CH, ta có ΔAOC đều cạnh $R \Rightarrow CH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Vậy : } S_{ACDB} = \frac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

§3. Góc nội tiếp

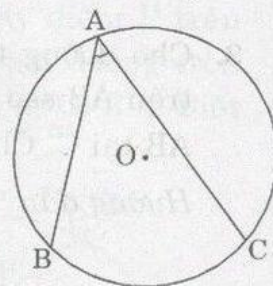
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định nghĩa :** Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong gọi là cung bị chắn.

2. **Định lý :** Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. **Hệ quả :** Trong một đường tròn :

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho ΔABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy D trên cạnh BC, AD cắt cung BC ở E. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$

b) $AB \cdot CD = AD \cdot CE$.

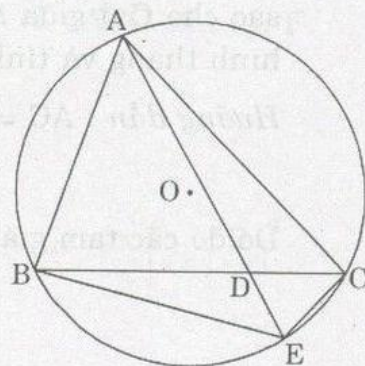
Giải

a) Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

mà $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (vì $AB < AC$)

Do đó $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$.



b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có : $\widehat{ABD} = \widehat{DEC}$ (cmt)

$$\widehat{BAE} = \widehat{BCE} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BE})$$

$$\text{Vậy } \triangle ABD \sim \triangle CED \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot CE.$$

ĐỀ SỐ 2

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở E. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

b) $BE^2 = AE \cdot DE$.

Giải

a) Ta có AE là phân giác của góc A nên

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE}$$

$$\text{Lại có } \widehat{ABC} = \widehat{AEC}$$

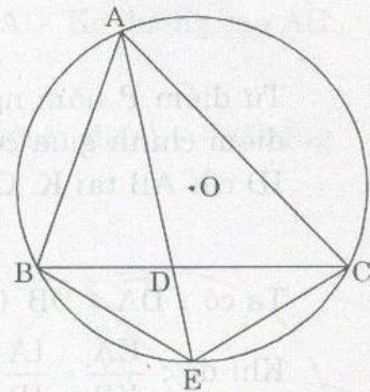
(góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

b) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BDE$ có : $\widehat{AEB}$ chung, $\widehat{BAE} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau $\widehat{BE} = \widehat{CE}$)

$$\text{Do đó } \triangle ABE \sim \triangle BDE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot DE.$$



ĐỀ SỐ 3

Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến PA, PB đến (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên dây AB lấy M bất kì. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt PA tại S và PB tại Q. Chứng minh rằng : $MS = MQ$.

Giải

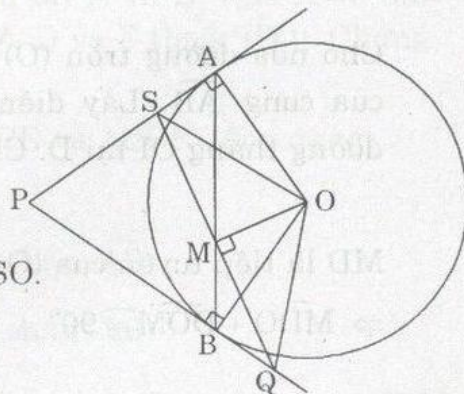
Ta có $PA \perp OA$

hay $SA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ$$

nên A thuộc đường tròn đường kính SO.

$$OM \perp SQ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{SMO} = 90^\circ$$



nên M thuộc đường tròn đường kính SO.

Do đó bốn điểm A, O, M, S cùng nằm trên một đường tròn.

Nối SO ta có $\widehat{MSO} = \widehat{MAO}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$)

Tương tự ta có bốn điểm O, M, B, Q cùng thuộc đường tròn đường kính OQ.

Do đó $\widehat{MBO} = \widehat{MQO}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$)

$\triangle AOB$ cân tại O ($OA = OB = R$) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} \Rightarrow \widehat{MSO} = \widehat{MQO}$

Chứng tỏ $\triangle SOQ$ cân tại O nên đường cao OM đồng thời là đường trung tuyến hay $SM = QM$.

ĐỀ SỐ 4

Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến PAB. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB. Kẻ đường kính DE. PE cắt (O) tại I, ID cắt AB tại K. Chứng minh rằng : $PA \cdot KB = PB \cdot KA$.

Giải

Ta có : $\widehat{DA} = \widehat{DB}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BID}$ hay IK là phân giác của $\triangle AIB$

Khi đó : $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$ (1)

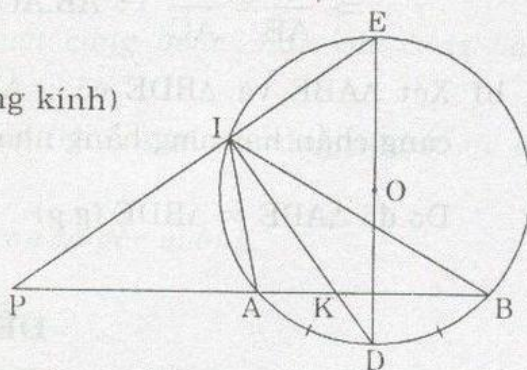
Mặt khác $\widehat{EID} = 90^\circ$ (ED là đường kính)

$\Rightarrow PI \perp KI$.

Do đó PI là phân giác góc ngoài của $\triangle AIB$.

Ta có : $\frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{KA}{KB} \Rightarrow PA \cdot KB = PB \cdot KA$.



ĐỀ SỐ 5

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa của cung $\widehat{AB}$. Lấy điểm M thuộc cung AI, tiếp tuyến tại M cắt đường thẳng OI tại D. Chứng minh : $\widehat{MDO} = 2\widehat{MBA}$.

Giải

MD là tiếp tuyến của (O) nên $MD \perp OM$ hay $\triangle MOD$ vuông tại M.

$\Rightarrow \widehat{MDO} + \widehat{DOM} = 90^\circ$ (1)

Lại có I là điểm chính giữa của cung AB,

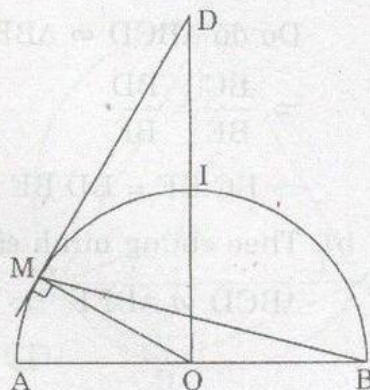
nên $OI \perp AB \Rightarrow \widehat{AOI} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{AOM} + \widehat{MOD} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{MOA}$

mà $\widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$ (góc ngoài của tam giác cân MOB).

$\Rightarrow \widehat{MDO} = 2\widehat{MBA}$.



ĐỀ SỐ 6

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Kẻ đường cao AH.

a) Chứng minh $\triangle BAH$ và $\triangle CAD$ đồng dạng.

b) Gọi I là điểm chính giữa cung BC (không chứa điểm A). Chứng minh rằng AI là tia phân giác của $\widehat{HAD}$.

Giải

a) Ta có $\triangle ACD$ vuông tại C (AD là đường kính).

Xét $\triangle BAH$ và $\triangle DAC$ có :

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

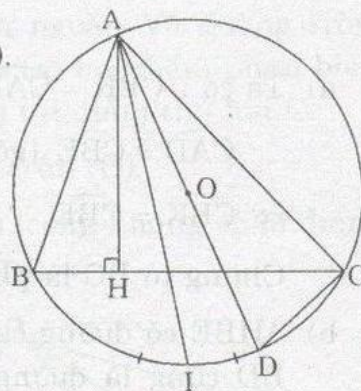
và $\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

Do đó $\triangle BAH \sim \triangle DAC$ (g.g).

b) I là điểm chính giữa cung BC

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ mà $\widehat{BAH} = \widehat{CAD}$ (do $\triangle BAH \sim \triangle DAC$)

$\Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{DAI}$ hay AI là phân giác của $\widehat{HAD}$.



ĐỀ SỐ 7

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E thuộc (O), D và F thuộc (O')). Chứng minh rằng :

a) $BC \cdot BF = BD \cdot BE$

b) $\triangle BCE$ và $\triangle BDF$ đồng dạng.

Giải

a) Ta có : $\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\widehat{BDA} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

Do đó $\triangle ABCD \sim \triangle BEF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BF}$$

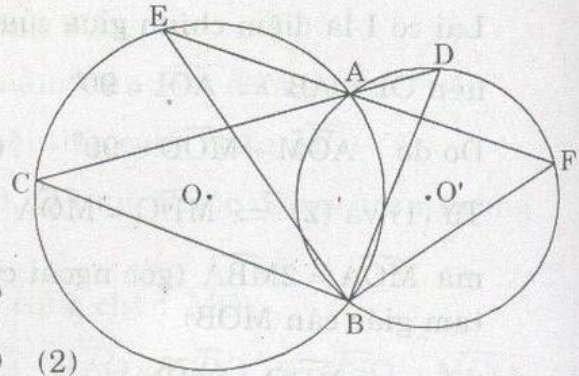
$$\Rightarrow BC \cdot BF = BD \cdot BE \quad (1)$$

b) Theo chứng minh câu a) :

$$\triangle ABCD \sim \triangle BEF \Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{FBD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\triangle BCE \sim \triangle BDF$ (g.g).



ĐỀ SỐ 8

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao AD, BK cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{HBE}$.

b) Chứng minh E đối xứng với H qua BC.

Giải

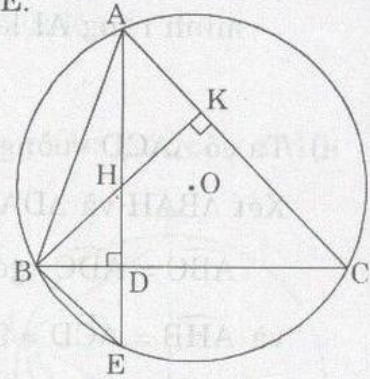
a) Ta có : $\widehat{CBK} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBE} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{CE})$$

$$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{CBE}$$

Chứng tỏ BC là phân giác của góc $\widehat{HBE}$.

b) $\triangle HBE$ có đường cao BD đồng thời là đường phân giác (cmt). Do đó BD cũng là đường trung trực của đoạn HE hay E và H đối xứng nhau qua BC.



ĐỀ SỐ 9

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC. Trên đoạn DA lấy DK = DB.

a) Chứng tỏ $\triangle BDK$ đều.

b) Chứng tỏ : $AD = BD + CD$.

c) Xác định vị trí của D để $AD + BD + CD$ nhỏ nhất.

Giải

a) $\triangle BDK$ cân ($DB = DK$) có $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$). Vậy $\triangle BDK$ đều.

b) $\triangle BDK$ đều (cmt) $\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 60^\circ$ mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$

Lại có : $BK = BD = DK$ (cmt)

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle CDB$ có :

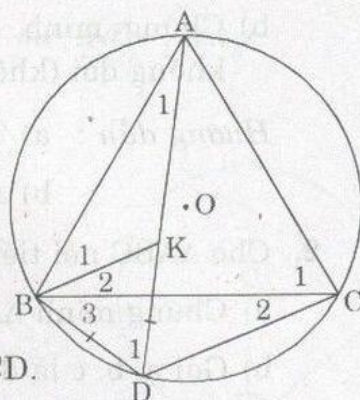
$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 \text{ (cmt)}$$

$$AB = CB \text{ (gt)}$$

và $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

$$\text{Vậy } \triangle AKB = \triangle CDB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AK = DC$$

$$\text{mà } AD = AK + KD \Rightarrow AD = BD + CD.$$



c) Xét ba điểm B, D, C có :

$$DB + DC \geq BC \Rightarrow 2(DB + DC) \geq 2BC$$

$$\text{mà } DB + DC = DA \Rightarrow DA + DB + DC \geq 2BC \text{ (không đổi)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ D trùng B hoặc C.

Vậy khi D trùng B hoặc trùng C thì $DA + DB + DC$ nhỏ nhất.

ĐỀ SỐ 10

Cho đường tròn (O) và một điểm P ở bên ngoài. Vẽ đường tròn (P; PO). Hai đường tròn (O) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Đường thẳng OP cắt đường tròn (P) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh CA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Lấy D thuộc cung AB của đường tròn (P) (cung không chứa điểm O). Chứng minh DO là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.

Giải

a) Ta có $\widehat{CAO} = 90^\circ$ (CO là đường kính)

$$\Rightarrow CA \perp OA$$

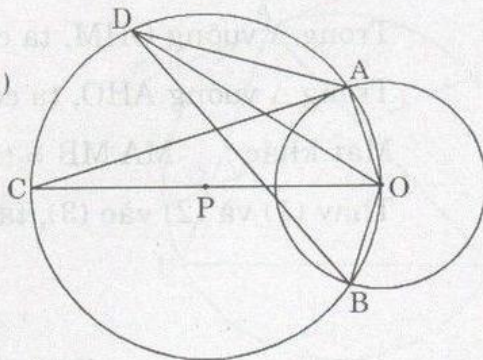
Chứng tỏ CA là tiếp tuyến của (O).

b) Gọi bán kính của đường tròn (O)

là R, ta có $OA = OB (= R)$

$$\Rightarrow \widehat{OA} = \widehat{OB}.$$

Do đó $\widehat{ADO} = \widehat{BDO}$ hay OD là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O; R). Qua A kẻ đường thẳng cắt cạnh BC tại D và cắt (O) tại E.

a) Chứng minh EA là tia phân giác của góc $\widehat{BEC}$.

b) Chứng minh $\triangle AEB$ và $\triangle ABD$ đồng dạng suy ra tích $AD.AE$ không đổi (không phụ thuộc vào vị trí điểm E).

Hướng dẫn : a) Ta có $AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CEA}$.

$$b) \triangle AEB \sim \triangle ABD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE.AD = AB^2.$$

2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AD , đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle ABH$ và $\triangle ADC$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C .

$$\text{Chứng minh : } S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}.$$

Hướng dẫn : a) $\triangle ABH \sim \triangle ADC$ (g.c.g)

$$b) \text{ Từ a) } \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{AD} = \frac{AB.AC}{2R}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB.AC}{2R} \cdot BC = \frac{a.b.c}{4R}.$$

3. Cho đường tròn $(O; R)$, hai dây AB và CD cắt nhau tại M . Chứng minh rằng : $MA.MB = MC.MD = R^2 - OM^2$.

$$\text{Hướng dẫn : Dễ thấy } \triangle AMC \sim \triangle DMB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

$$\Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

Nối OM , kẻ $OH \perp AB$.

$$\text{Trong } \triangle \text{ vuông } OHM, \text{ ta có : } HM^2 = OM^2 - OH^2 \quad (1)$$

$$\text{Trong } \triangle \text{ vuông } AHO, \text{ ta có : } AH^2 = AO^2 - OH^2 = R^2 - OH^2 \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác : } MA.MB = (AH + HM)(AH - HM) = AH^2 - HM^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Thay (1) và (2) vào (3), ta có : } MA.MB &= R^2 - OH^2 - (OM^2 - OH^2) \\ &= R^2 - OH^2 - OM^2 + OH^2 \\ &= R^2 - OM^2 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

4. Cho đường tròn (O) . Một điểm P cố định bên trong đường tròn ($P \neq O$). Hai dây AB và CD thay đổi qua P và $AB \perp CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn : Ta chứng minh cho tứ giác $PMON$ là hình bình hành và I là giao điểm hai đường chéo OP và MN . Ta có I cố định (vì O, P cố định).

§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

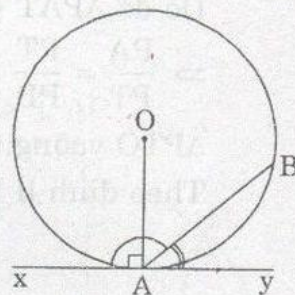
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm

xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A .

Ax, Ay là hai tiếp tuyến.

$\widehat{BAx}, \widehat{BAy}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.



2. Định lý

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở D và E . Chứng tỏ $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng và $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

Giải

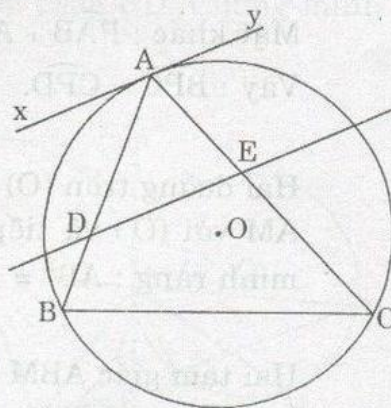
Ta có : $DE \parallel xAy$

$$\Rightarrow \widehat{xAD} = \widehat{ADE} \text{ (so le trong)}$$

Lại có $\widehat{xAD} = \widehat{BCA}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BCA}$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có $\widehat{BAC}$ chung.

$$\text{Do đó } \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AB \cdot AD = AC \cdot AE.$$



ĐỀ SỐ 2

Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm P ở bên ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến PT và cát tuyến PAB với (O) .

Chứng minh rằng : $PT^2 = PA \cdot PB = PO^2 - R^2$.

Giải

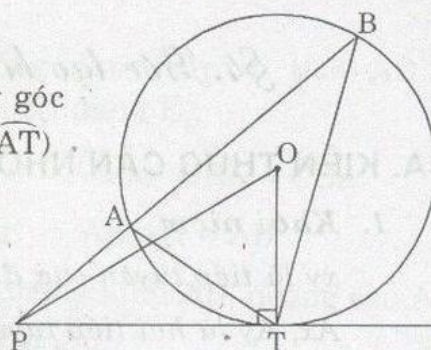
Ta có : $\widehat{ABT} = \widehat{ATP}$ (góc nội tiếp bằng góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn $\widehat{AT}$)

Do đó $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$

$\triangle PTO$ vuông (PT là tiếp tuyến của (O))

Theo định lí Py-ta-go : $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - R^2$.



ĐỀ SỐ 3

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại P . Dây cung AB của một đường tròn kéo dài tiếp xúc với đường tròn kia tại C . AP cắt đường tròn (O') tại P và D . Chứng minh : $\widehat{BPC} = \widehat{CPD}$.

Giải

Kẻ tiếp tuyến chung tại P của hai đường tròn cắt AC tại Q .

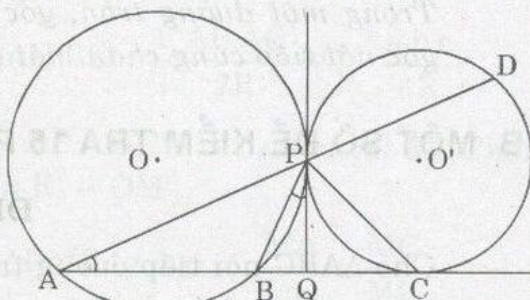
Ta có : $\widehat{BPC} = \widehat{BPQ} + \widehat{QPC}$

Trong đó $\widehat{BPQ} = \widehat{PAB}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BP}$)

$$\widehat{QPC} = \widehat{ACP} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{CP}$$

Mặt khác : $\widehat{PAB} + \widehat{ACP} = \widehat{CPD}$ (góc ngoài của tam giác)

Vậy : $\widehat{BPC} = \widehat{CPD}$.



ĐỀ SỐ 4

Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ tiếp tuyến AM với (O') và tiếp tuyến AN với (O) ($M \in (O)$, $N \in (O')$). Chứng minh rằng : $AB^2 = MB \cdot NB$ và $\widehat{MBA} = \widehat{NBA}$.

Giải

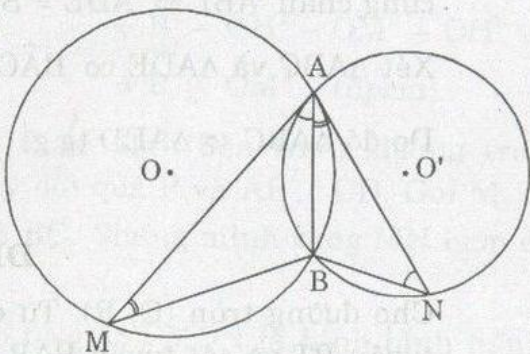
Hai tam giác ABM và NBA có :

$$\widehat{AMB} = \widehat{BAN}$$

và $\widehat{ANB} = \widehat{MAB}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle NBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{NB} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow AB^2 = MB \cdot NB \text{ và có } \widehat{MBA} = \widehat{NBA}.$$



ĐỀ SỐ 5

Cho góc nhọn AMB nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa M , vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = \widehat{AMB}$. Chứng tỏ Ax là tiếp tuyến của (O) .

Giải

Vẽ đường kính AC của (O) , ta phải chứng minh $Ax \perp AC$.

Thật vậy, ta có :

$$\widehat{ACB} = \widehat{AMB} \quad (1)$$

(góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$$\widehat{AMB} = \widehat{xAB} \quad (\text{gt}) \quad (2)$$

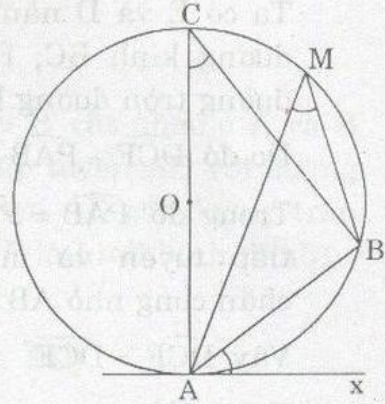
mà $\widehat{CBA} = 90^\circ$ (AC là đường kính)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{CAB} + \widehat{xAB} = 90^\circ$

Chứng tỏ Ax là tiếp tuyến của (O) .

Xin các bạn lưu ý : Bài toán này là phần đảo của định lý về góc của tiếp tuyến và một dây, dùng để chứng minh.



ĐỀ SỐ 6

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Lấy điểm B thuộc đường tròn (O) . Qua B kẻ tiếp tuyến với (O) cắt (O') ở hai điểm C và D . Gọi M là điểm chính giữa của cung CD . Chứng minh $\triangle ABM$ vuông tại A .

Giải

Kẻ tiếp tuyến qua A cắt BD tại I ,

$$\text{ta có : } \widehat{IAC} = \widehat{ADC} \quad (1)$$

(góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

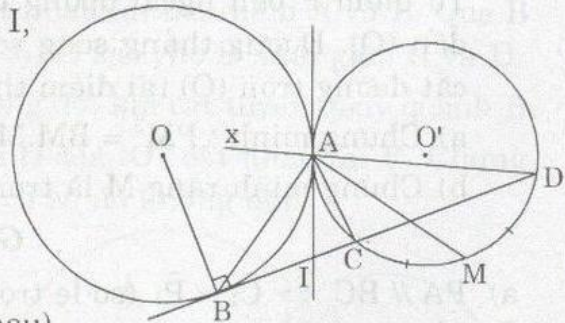
$$\text{Lại có : } \widehat{IAB} = \widehat{IBA} \quad (2)$$

(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Từ (1) và (2) : $\widehat{IAC} + \widehat{IAB} = \widehat{ADC} + \widehat{IBA} = \widehat{BAx}$ ($\widehat{BAx}$ là góc ngoài của $\triangle BAD$) hay $\widehat{BAC} = \widehat{BAx}$, chứng tỏ AB là phân giác của $\widehat{IAx}$.

Mặt khác M là điểm chính giữa cung CD nên $\widehat{CAM} = \widehat{DAM}$ hay AM là phân giác ngoài.

Vậy $AB \perp AM$ hay $\triangle ABM$ vuông tại A .



ĐỀ SỐ 7

Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C bất kì, kẻ các đường vuông góc CD, CE, CF lần lượt xuống các đường thẳng AB, BP, PA. Chứng minh rằng : $\widehat{DCF} = \widehat{DCE}$ và $\widehat{DFC} = \widehat{CDE}$.

Giải

Ta có E và D nằm trên đường tròn đường kính BC; F và D nằm trên đường tròn đường kính AC.

Do đó $\widehat{DCF} + \widehat{PAB} = \widehat{DCE} + \widehat{PBA} = 2v$

Trong đó $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung nhỏ AB).

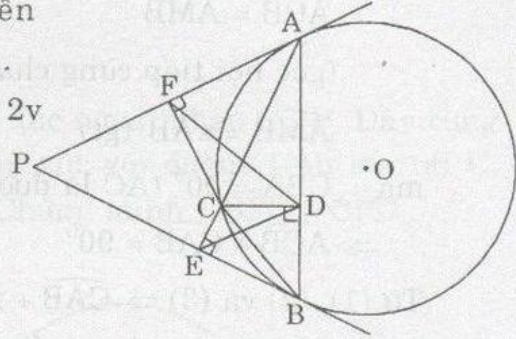
Vậy $\widehat{DCF} = \widehat{DCE}$.

Trong đường tròn (O), ta có : $\widehat{CBE} = \widehat{CAB}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CB}$).

Trong đường tròn đường kính BC, ta có : $\widehat{CBE} = \widehat{CDE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CE}$).

Trong đường tròn đường kính CA, ta có : $\widehat{CAB} = \widehat{DFC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CD}$).

Vậy $\widehat{DFC} = \widehat{CDE}$.



ĐỀ SỐ 8

Từ điểm P bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến PA và PB đến (O). Đường thẳng song song với PA kẻ từ B cắt (O) tại C, PC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Đường BE cắt PA tại M.

a) Chứng minh : $PM^2 = BM.ME$.

b) Chứng minh rằng M là trung điểm của PA.

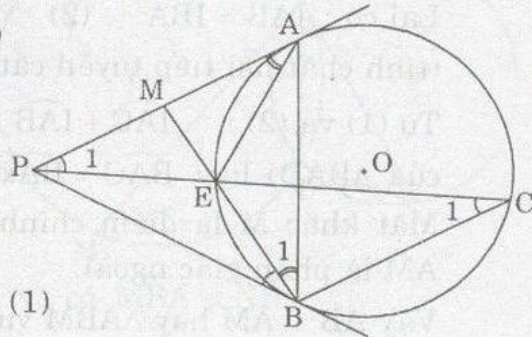
Giải

a) $PA \parallel BC \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{P}_1$ (so le trong)

$\widehat{C}_1 = \widehat{MBP}$ (góc nội tiếp bằng góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn $\widehat{BE}$)

Do đó $\triangle PME \sim \triangle BMP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PM}{BM} = \frac{ME}{PM} \Rightarrow PM^2 = BM.ME \quad (1)$$



b) Tương tự ta có hai tam giác AME và BMA đồng dạng (g.g) vì có :

$$\widehat{MAE} = \widehat{B_1} \text{ và } \widehat{AMB} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{ME}{AM} \Rightarrow AM^2 = BM \cdot ME \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow PM^2 = AM^2$$

$$\Rightarrow PM = AM \text{ hay M là trung điểm của PA.}$$

ĐỀ SỐ 9

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R > R'$ cắt nhau ở A và B sao cho O và O' ở về hai phía của AB. Vẽ tiếp tuyến AD với đường tròn (O) . Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt đường tròn (O') tại E và cắt (O) tại F. Chứng minh ADEF là hình bình hành.

Giải

Ta có : $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

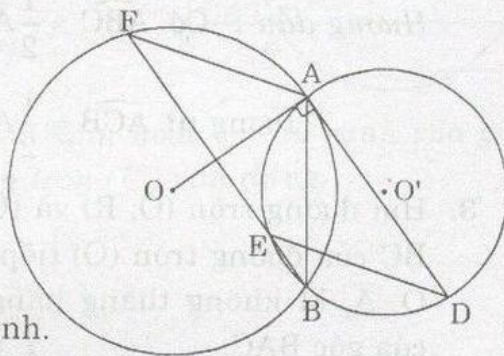
$\widehat{BAD} = \widehat{BFA}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

Do đó : $\widehat{BED} = \widehat{BFA}$

$\Rightarrow AF \parallel ED$ (đồng vị)

Lại có : $BF \parallel AD$ (gt)

Vậy tứ giác ADEF là hình bình hành.



ĐỀ SỐ 10

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Qua B vẽ cát tuyến cắt (O) tại C và (O') tại D sao cho B nằm giữa C và D.

a) Chứng tỏ góc CAD có số đo không đổi khi cát tuyến quay quanh B.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) và tại D của (O') cắt nhau tại E. Chứng minh góc E của tam giác ECD có số đo không đổi.

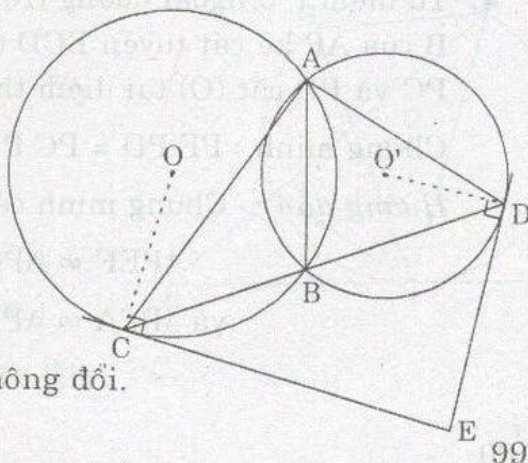
Giải

$$\text{a) Ta có : } \text{sd}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AB}$$

$$\text{sd}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AB}$$

A, B cố định nên các góc $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$ không đổi

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ADB}) \text{ không đổi.}$$



- b) Ta có $\widehat{CAD}$ không đổi (cmt), trong đó $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD}$
 mà $\widehat{CAB} = \widehat{ECB}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{EDC}$ (góc nội tiếp bằng góc giữa tiếp tuyến và một dây)
 Do đó $\widehat{ECD} + \widehat{EDC}$ không đổi $\Rightarrow \widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{ECD} + \widehat{EDC})$ không đổi.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Qua đỉnh B kẻ đường song song với tiếp tuyến tại A của (O) , đường thẳng này cắt AC ở M .

Chứng tỏ : $AB^2 = AC \cdot AM$.

Hướng dẫn : Xét các tam giác ABC và AMB đồng dạng (g.g).

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A , tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) tại B và (O') tại C . Chứng minh $\widehat{BAC}$ vuông.

Hướng dẫn : Có $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$,

tương tự $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AO'C}$ mà $\widehat{AOB} + \widehat{AO'C} = 180^\circ$.

3. Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong tại A ($R > R'$), dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') tại M (ba điểm O, A, M không thẳng hàng). Chứng minh rằng AM là phân giác của góc BAC .

Hướng dẫn : Kẻ tiếp tuyến tại A . Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến tại A với CB .

Ta có $EM = EA$ và $\widehat{EAM} = \widehat{EMA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) hay $\widehat{EAB} + \widehat{BAM} = \widehat{ECA} + \widehat{CAM}$ (vì $\widehat{EMA}$ là góc ngoài nên bằng tổng hai góc trong không kề) mà $\widehat{EAB} = \widehat{ECA} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$.

4. Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) , kẻ tiếp tuyến PA . Từ trung điểm B của AP kẻ cát tuyến BCD (C nằm giữa B và D). Các đường thẳng PC và PD cắt (O) tại điểm thứ hai E và F .

Chứng minh : $PF \cdot PD = PC \cdot PE = 4AB^2$.

Hướng dẫn : Chứng minh các tam giác sau đồng dạng :

$$\triangle PEF \sim \triangle PCD \text{ (g.g)} \Rightarrow PF \cdot PD = PC \cdot PE$$

$$\text{và } \triangle PFA \sim \triangle PDA \text{ (g.g)} \Rightarrow PA^2 = PF \cdot PD$$

$$\text{mà } PA = 2AB \Rightarrow PA^2 = 4AB^2.$$

§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý

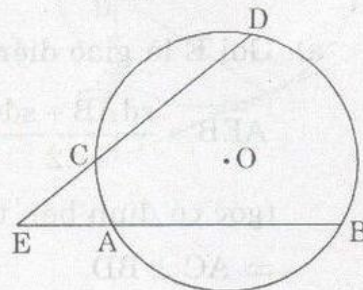
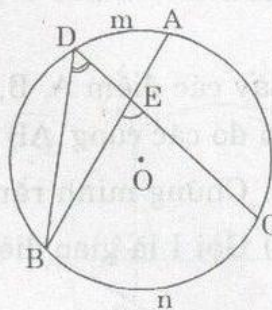
- Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\widehat{BnC} + sđ\widehat{AmD}}{2} \quad (*)$$

- Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BED} = \frac{sđ\widehat{BD} - sđ\widehat{AC}}{2} \quad (**)$$

Lưu ý : Trong trường hợp mà một cạnh hoặc cả hai cạnh của góc trở thành tia tiếp tuyến của đường tròn (**) vẫn đúng.



B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến PT và cát tuyến PAB đến (O) (A nằm giữa P và B), phân giác góc ATB cắt AB tại C và (O) tại D.

a) Chứng minh : $PT = PC$

b) Chứng minh : $BD^2 = DC \cdot DT$.

Giải

a) Ta có $\widehat{PTC} = \frac{sđ\widehat{TAD}}{2} = \frac{sđ\widehat{TA} + sđ\widehat{AD}}{2}$

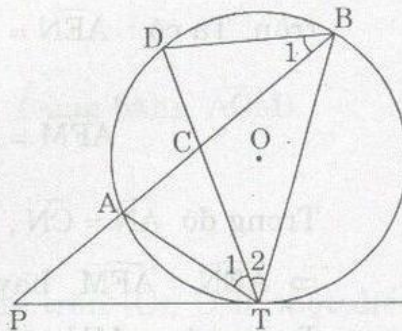
(góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$$\widehat{PCT} = \frac{sđ\widehat{TA} + sđ\widehat{BD}}{2}$$

(góc có đỉnh bên trong đường tròn)

mà $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ (vì TD là phân giác)

$\Rightarrow \widehat{PTC} = \widehat{PCT}$ hay ΔPCT cân $\Rightarrow PT = PC$.



b) $\widehat{B}_1 = \widehat{T}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$) mà $\widehat{T}_1 = \widehat{T}_2$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{T}_2$

$$\text{Do đó } \triangle DBC \sim \triangle DTB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{DT} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow BD^2 = DC \cdot DT.$$

ĐỀ SỐ 2

Lấy các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó trên đường tròn (O) sao cho số đo các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ lần lượt là 60° , 120° .

a) Chứng minh rằng : $AC \perp BD$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AD và BC. Tính góc AIB.

Giải

a) Gọi E là giao điểm của AC và BD. Ta có :

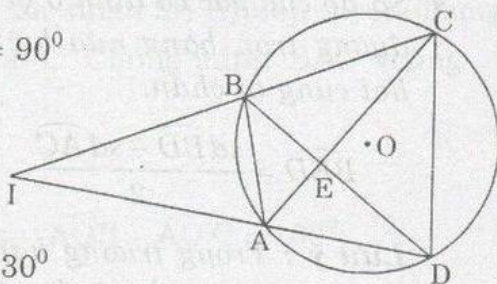
$$\widehat{AEB} = \frac{\text{sd}\widehat{AB} + \text{sd}\widehat{CD}}{2} = \frac{60^\circ + 120^\circ}{2} = 90^\circ$$

(góc có đỉnh bên trong đường tròn)

$\Rightarrow AC \perp BD$.

$$\text{b) } \widehat{AIB} = \frac{\text{sd}\widehat{CD} - \text{sd}\widehat{AB}}{2} = \frac{120^\circ - 60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(góc có đỉnh bên ngoài đường tròn).



ĐỀ SỐ 3

Cho AB và AC là hai dây cung trong đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung AB, N là điểm chính giữa của cung AC. Các đường thẳng MN và AB cắt nhau tại E, MN và AC cắt nhau tại F. Chứng minh : $AE = AF$.

Giải

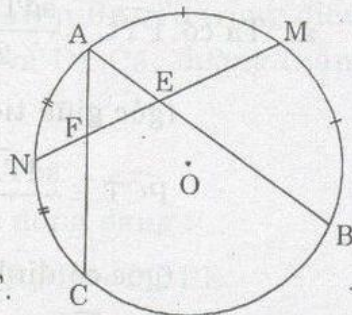
• Trường hợp MN cắt AB và AC tại các điểm E, F ở bên trong đường tròn. Ta có : $\widehat{AEN} = \frac{\text{sd}\widehat{AN} + \text{sd}\widehat{BM}}{2}$

$$\widehat{AFM} = \frac{\text{sd}\widehat{AM} + \text{sd}\widehat{CN}}{2}$$

Trong đó $\widehat{AN} = \widehat{CN}$, $\widehat{BM} = \widehat{AM}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{AFM}$ hay $\triangle AEF$ cân $\Rightarrow AE = AF$.

• Trường hợp MN cắt AB, AC ở E và F nằm ngoài đường tròn hoặc một điểm ở bên trong, một điểm ở bên ngoài (xin các bạn tự giải).



ĐỀ SỐ 4

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một điểm C trên cung AB. Lấy trên dây AC một điểm D. Vẽ $DE \perp AB$ tại E cắt đường tròn (O) tại P, Q (D nằm giữa E và P). Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt ED tại F. Chứng minh $\triangle CDF$ cân.

Giải

Gọi giao điểm của DE với đường tròn là P, Q.

$$\text{Ta có : } \widehat{DCF} = \frac{sđ\widehat{APC}}{2} = \frac{sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{PC}}{2}$$

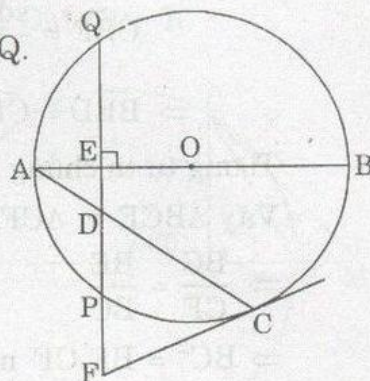
(góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

$$\widehat{CDF} = \frac{sđ\widehat{AQ} + sđ\widehat{PC}}{2} \text{ (góc có đỉnh}$$

bên trong đường tròn)

$$\text{mà } \widehat{AP} = \widehat{AQ} \text{ (vì } AB \perp PQ)$$

Suy ra $\widehat{CDF} = \widehat{DCF}$ hay $\triangle CDF$ cân.



ĐỀ SỐ 5

Tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy M thuộc cung nhỏ AB. Gọi P là giao điểm của AM với CB.

a) Chứng minh : $\widehat{APC} = \widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\triangle AMB$ và $\triangle ABP$ đồng dạng.

Giải

$$\text{a) } \widehat{APC} = \frac{sđ\widehat{AC} - sđ\widehat{MB}}{2} \text{ (góc có đỉnh}$$

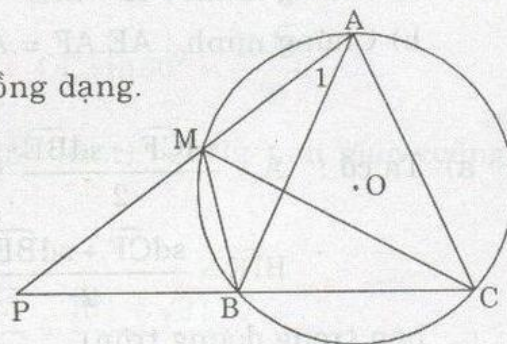
bên ngoài đường tròn)

$$\widehat{ACM} = \frac{sđ\widehat{AM}}{2} = \frac{sđ\widehat{AB} - sđ\widehat{MB}}{2} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{mà } \widehat{AB} = \widehat{AC} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{ACM}.$$

b) $\triangle AMB$ và $\triangle ABP$ có $\widehat{A_1}$ chung, $\widehat{MBA} = \widehat{P}$ (cùng bằng $\widehat{ACM}$)

Vậy $\triangle AMB \sim \triangle ABP$ (g.g).



ĐỀ SỐ 6

Tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn (O), D là một điểm trên cung BC. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E, AC và BD cắt nhau tại F. Chứng minh rằng : $AB^2 = BE \cdot CF$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \widehat{BED} &= \frac{\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{BD}}{2} = \frac{\text{sđ}\widehat{BC} - \text{sđ}\widehat{BD}}{2} \quad (\text{vì } \widehat{AC} = \widehat{BC}) \\ &= \frac{\text{sđ}\widehat{DC}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn}) \end{aligned}$$

$$\widehat{CBF} = \frac{\text{sđ}\widehat{DC}}{2} \quad (\text{góc nội tiếp})$$

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{CBF}$$

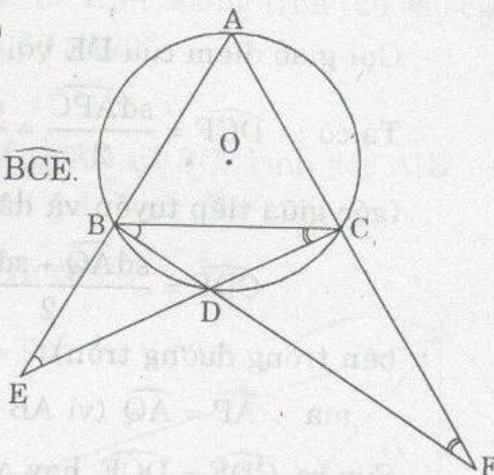
Tương tự ta chứng minh được $\widehat{CFD} = \widehat{BCE}$.

Vậy $\triangle BCE \sim \triangle CFB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BE \cdot CF \text{ mà } BC = AB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = BE \cdot CF.$$



ĐỀ SỐ 7

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ hai cát tuyến ABC (B nằm giữa A và C) và AEF (E nằm giữa A và F). Gọi I là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh : $\widehat{A} + \widehat{BIE} = 2\widehat{CBF}$.

b) Chứng minh : $AE \cdot AF = AB \cdot AC$.

Giải

$$\text{a) Ta có : } \widehat{A} = \frac{\text{sđ}\widehat{CF} - \text{sđ}\widehat{BE}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh bên ngoài đường tròn})$$

$$\widehat{BIE} = \frac{\text{sđ}\widehat{CF} + \text{sđ}\widehat{BE}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh}$$

bên trong đường tròn)

$$\text{Do đó : } \widehat{A} + \widehat{BIE} = \text{sđ}\widehat{CF}$$

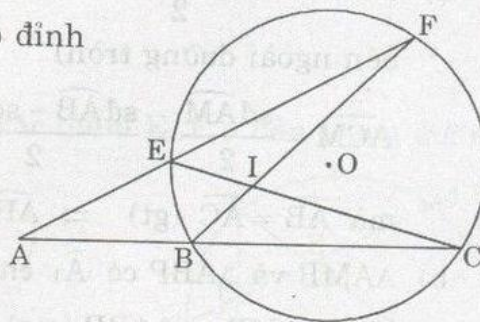
$$\text{Lại có : } \widehat{CBF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CF}$$

(góc nội tiếp và cung bị chắn)

$$\text{Vậy : } \widehat{A} + \widehat{BIE} = 2\widehat{CBF}.$$

b) Xét $\triangle ACE$ và $\triangle AFB$ có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ACE} = \widehat{AFB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$)

$$\text{Vậy } \triangle ACE \sim \triangle AFB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AE \cdot AF = AB \cdot AC.$$



ĐỀ SỐ 8

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy C thuộc đường tròn sao cho $\widehat{COB} = 60^\circ$. Gọi I là điểm chính giữa của cung CB và M là giao điểm của OB và CI .

a) Tính $\widehat{CMO}$.

b) Kẻ đường cao AH của $\triangle COM$. Tính độ dài OM theo R .

Giải

a) Ta có : $\widehat{COB} = 60^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{CB} = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{AC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

I là điểm chính giữa cung CB nên

$$\widehat{IC} = \widehat{IB} = \frac{\widehat{CB}}{2} = 30^\circ$$

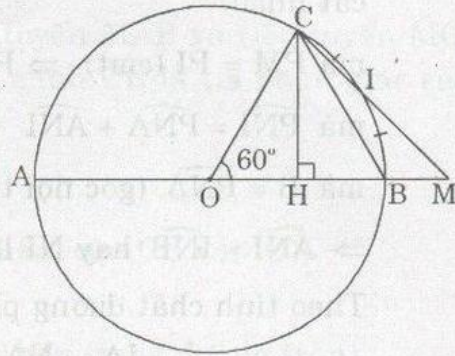
$$\text{Vậy : } \widehat{CMO} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{IB}}{2} = \frac{120^\circ - 30^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn).}$$

b) $\triangle OCB$ cân có $\widehat{COB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Do đó đường cao CH đồng thời là đường trung tuyến

$$\text{hay } HO = HB = \frac{R}{2} \text{ và } CH = OC \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác CHM vuông có $\widehat{CMO} = 45^\circ$ (cmt) nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow HM = CH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Do đó } OM = OH + HM = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(1 + \sqrt{3})}{2}.$$



ĐỀ SỐ 9

Cho đường tròn (O) . Từ điểm P bên ngoài đường tròn kẻ cát tuyến PAB và hai tiếp tuyến PM, PN với (O) (M thuộc cung nhỏ AB). Lấy D là điểm chính giữa của cung lớn AB , DM cắt AB tại I .

a) Chứng minh : $PM = PI$.

b) Chứng minh : $IA \cdot NB = IB \cdot NA$.

Giải

a) Ta có $\widehat{PMD} = \frac{\widehat{DM}}{2} = \frac{\widehat{DA} + \widehat{MA}}{2}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$$\widehat{PIM} = \frac{sd\widehat{DB} + sd\widehat{MA}}{2}$$

(góc có đỉnh bên trong đường tròn)

mà $\widehat{DB} = \widehat{DA}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{PMD} = \widehat{PIM}$

Do đó $\triangle PMI$ cân tại đỉnh P $\Rightarrow PM = PI$.

b) $PM = PN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

mà $PM = PI$ (cmt) $\Rightarrow PN = PI$ nên $\triangle PNI$ cân $\Rightarrow \widehat{PNI} = \widehat{PIN}$

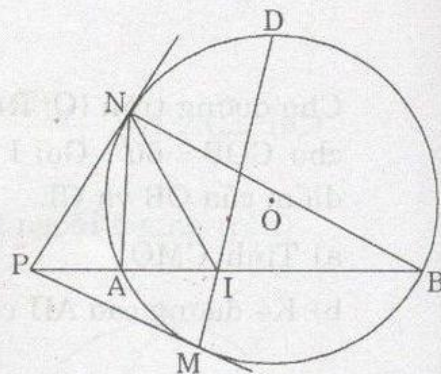
mà $\widehat{PNI} = \widehat{PNA} + \widehat{ANI}$ và $\widehat{PIN} = \widehat{INB} + \widehat{B}$ (góc ngoài của $\triangle NIB$)

mà $\widehat{B} = \widehat{PNA}$ (góc nội tiếp bằng góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{INB}$ hay NI là phân giác của $\triangle ANB$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow IA \cdot NB = IB \cdot NA.$$



ĐỀ SỐ 10

Cho đường tròn (O; R) đường kính BC. Lấy A là điểm chính giữa của cung BC. D là điểm di động trên cung AC, AD cắt BC tại E. Xác định vị trí điểm D để $2AD + AE$ nhỏ nhất.

Giải

$$\text{Ta có : } \widehat{AEC} = \frac{sd\widehat{AB} - sd\widehat{CD}}{2} = \frac{sd\widehat{AC} - sd\widehat{CD}}{2} = \frac{sd\widehat{AD}}{2} \quad (\text{vì } \widehat{AB} = \widehat{AC})$$

$$\text{Lại có } \widehat{ACD} = \frac{sd\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ACD}$$

$\Rightarrow \triangle ACD$ và $\triangle AEC$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AE$$

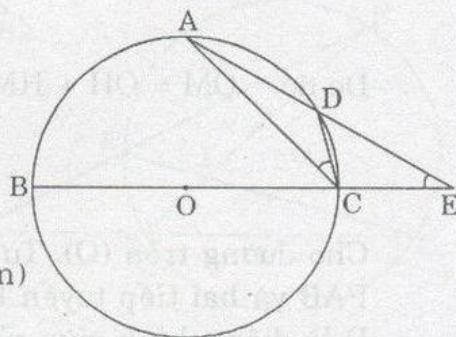
$\triangle ABC$ vuông cân (chắn nửa đường tròn)
có $BC = 2R$.

Đặt $AB = AC = x$.

$$\text{Theo định lí Py-ta-go : } x^2 + x^2 = (2R)^2 \Rightarrow 2x^2 = 4R^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2R^2 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } AB = AC = R\sqrt{2} \Rightarrow (R\sqrt{2})^2 = AD \cdot AE \Rightarrow AD \cdot AE = 2R^2.$$



Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có :

$$2AD + AE \geq 2\sqrt{2AD \cdot AE}$$

$$2AD + AE \geq 4R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2AD = AE = 2R$

Do đó khi D thuộc cung AC sao cho $AD = R$ thì $2AD + AE$ nhỏ nhất.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Từ M ở ngoài đường tròn (O), vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC. Trên tia MAB lấy ME = MC. Chứng minh CE là tia phân giác của góc ACB.

Hướng dẫn :

$$\text{Có } \widehat{MCE} = \frac{\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{AD}}{2} \quad (\text{D là giao điểm của CE với (O)})$$

$$\widehat{MEC} = \frac{\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BD}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh bên trong đường tròn})$$

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{AD} = \text{sđ}\widehat{BD} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{BCE} \text{ hay CE là phân giác.}$$

2. Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên cung nhỏ AD lấy điểm M sao cho $\widehat{AOM} = 60^\circ$. Gọi P là giao điểm của CA và BM.

a) Tính $\widehat{BPC}$.

b) Gọi E là giao điểm của AB và CM. Tính $\widehat{AEM}$.

$$\text{Hướng dẫn : Ta có } \widehat{BPC} = \frac{\text{sđ}\widehat{BC} - \text{sđ}\widehat{AM}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$

(góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$$\widehat{AEM} = \frac{\text{sđ}\widehat{BC} + \text{sđ}\widehat{AM}}{2} = \frac{90^\circ + 60^\circ}{2} = 75^\circ$$

(góc có đỉnh bên trong đường tròn).

3. Cho đường tròn (O) và hai dây cung bằng nhau $AB = AC$. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC. Chứng minh : $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

$$\text{Hướng dẫn : } \widehat{ASC} = \frac{\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{MC}}{2}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} \text{ nên } \widehat{ASC} = \frac{\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{MC}}{2} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM} = \widehat{ACM}$$

$$\Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{MCA}.$$

4. Cho ΔABC cân ($AB = AC$) nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của hai góc B và C cắt nhau tại E và cắt đường tròn ở F và D . Chứng minh rằng tứ giác $EDAF$ là hình thoi.

Hướng dẫn : Trước hết ta chứng minh $\widehat{DAB} = \widehat{ABF} \Rightarrow AD \parallel BF$.

Tương tự : $AF \parallel CD$ nên $ADEF$ là hình bình hành và có $AD = AF$ (vì $\widehat{AD} = \widehat{AF}$). Vậy $ADEF$ là hình thoi. Cụ thể :

$$\widehat{ADC} = \frac{sd\widehat{AF} + sd\widehat{FC}}{2} \quad \text{và} \quad \widehat{BED} = \frac{sd\widehat{BD} + sd\widehat{FC}}{2}$$

mà $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, $\widehat{CF} = \widehat{AF}$. Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{BED}$.

5. Cho đường tròn (O). Trên (O) lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác của ΔABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

Hướng dẫn : Gọi I là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 , ta có :

$$\begin{aligned} \widehat{AIB_1} &= \frac{sd\widehat{AB_1} + sd\widehat{A_1B} + sd\widehat{BC_1}}{2} = \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{BCC_1} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}) = 90^\circ \quad \text{Chứng tỏ } AA_1 \perp B_1C_1. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta có $BB_1 \perp A_1C_1, CC_1 \perp A_1B_1$.

§6. Cung chứa góc

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

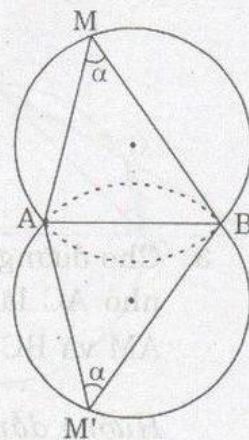
- Quỹ tích những điểm M nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc α không đổi ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB .

- Cách dựng cung chứa góc α :

- Dựng đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- Dựng tia Ax tạo với AB một góc là α .
- Dựng tia $Ay \perp Ax$.
- Lấy O là giao điểm của đường trung trực d với Ay .

- Cách giải bài toán quỹ tích :

Để chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là



một hình $\mathcal{H}$ nào đó, ta phải chứng minh hai phần rồi nêu kết luận.

- Phần thuận : Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình $\mathcal{H}$.
- Phần đảo : Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất $\mathcal{T}$.
- Kết luận : Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình $\mathcal{H}$.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh BC cố định và I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Chứng minh rằng I thuộc cung tròn cố định khi A thay đổi. Hãy chỉ ra cách vẽ cung tròn đó.

Giải

$$\text{Ta có : } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 45^\circ$$

$$\text{hay } \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 45^\circ. \text{ Do đó } \widehat{BIC} = 135^\circ.$$

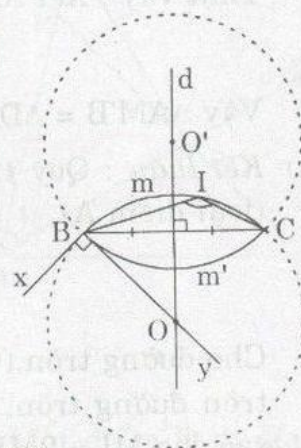
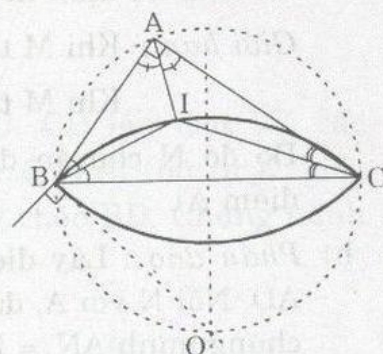
Vậy I nằm trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC (trừ B và C).

Cách vẽ :

- Vẽ đường trung trực d của đoạn BC.
- Vẽ tia Bx tạo với BC góc 135° .
- Vẽ tia By vuông góc với Bx.
- Lấy O là giao điểm của By với d .
- Vẽ cung BmC tâm O, bán kính OB sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ BC không chứa tia Bx.

$\widehat{BmC}$ là cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.

- Lấy O' đối xứng với O qua BC, ta có cung $\widehat{Bm'C}$.

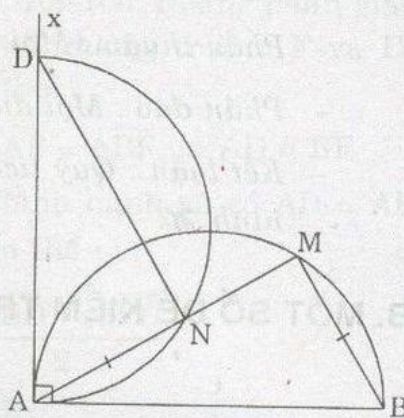


ĐỀ SỐ 2

M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB. Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$. Tìm quỹ tích các điểm N.

Giải

- a) *Phần thuận* : Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn ta dựng tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB = 2R$ (không đổi) nên D cố định.



Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DAN$ có :

$$AB = AD,$$

$\widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{MAB}$),

$$BM = AN \text{ (gt.)}$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle DAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DNA} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (AB là đường kính).

Do A, D cố định nên N thuộc đường tròn đường kính AD.

Giới hạn : Khi M trùng A thì N trùng D.

Khi M trùng B thì N trùng A.

Do đó N chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AD (loại điểm A).

- b) *Phần đảo* : Lấy điểm N' bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính AD. Nối N' với A, đường AN' cắt nửa đường tròn (O) tại M'. Ta phải chứng minh $AN' = BM'$.

Thật vậy : Xét $\triangle AM'B$ và $\triangle DN'A$ có : $\widehat{AM'B} = \widehat{DN'A} = 90^\circ$, $AB = AD$,
 $\widehat{ABM'} = \widehat{DAN'}$.

Vậy $\triangle AM'B = \triangle DN'A$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BM' = AN'$.

- c) *Kết luận* : Quỹ tích các điểm N là nửa đường tròn đường kính AD (loại điểm A).

ĐỀ SỐ 3

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. M là một điểm di động trên đường tròn. Nối MA, MB, trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = 2MB$. Tìm tập hợp các điểm I.

Giải

- a) *Phần thuận* : Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMI} = 90^\circ$

Trong tam giác vuông IMB : $\tan \widehat{AIB} = \frac{BM}{IM} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \alpha$ không đổi ($\alpha \approx 24^\circ 34'$), AB cố định.

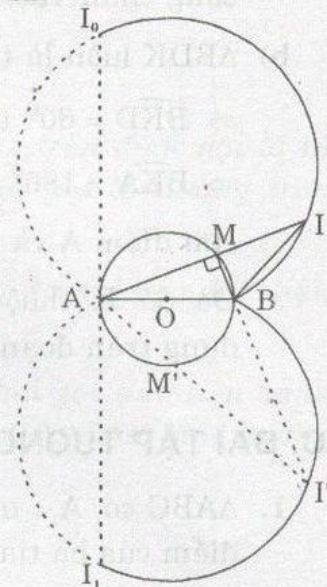
Vậy I nằm trên cung chứa góc α , vẽ trên đoạn AB.

Giới hạn : I nằm trên hai cung I_0B và I_1B đối xứng nhau qua AB với $I_0I_1 \perp AB$ tại A.

- b) *Phần đảo* : Lấy một điểm I' bất kì trên cung I_0B (hoặc cung I_1B) nối I'A cắt đường tròn (O) tại M'. Ta có $\widehat{AM'B} = 90^\circ$. Do đó $\Delta BM'I$ vuông. Khi đó :

$$\tan \widehat{BI'M} = \tan \alpha = \frac{M'B}{M'I'} = \frac{1}{2} \Rightarrow M'I' = 2M'B.$$

- c) *Kết luận* : Tập hợp các điểm I là cung I_0B và I_1B đối xứng qua AB là phần của cung chứa góc α ($\tan \alpha = \frac{1}{2}$) vẽ trên AB.



ĐỀ SỐ 4

Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Gọi P và Q theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng AE, AF với đường chéo BD. Chứng minh rằng ΔAQE vuông cân.

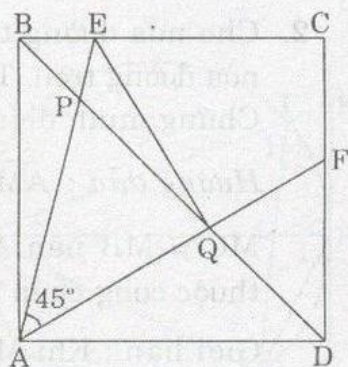
Giải

Ta có $\widehat{EBQ} = \widehat{EAQ} = 45^\circ$ nên A, B cùng nằm trên cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn EQ hay bốn điểm A, B, E, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Lại có $\widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQE} = 90^\circ$

hay ΔAQE vuông tại Q có $\widehat{EAQ} = 45^\circ$.

Vậy ΔAQE vuông cân.



ĐỀ SỐ 5

Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (O). Một điểm D di động trên cung nhỏ BC. Trên đoạn DA lấy DK = DB.

- a) Chứng tỏ ΔBDK đều.

- b) Khi D di chuyển trên cung BC thì K chuyển động trên đường nào ?

Giải

- a) Ta có : DK = DB nên ΔBDK cân có $\widehat{BDK} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (góc nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BKD} = 60^0 \text{ (không đổi)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BKA} = 180^0 - 60^0 = 120^0 \text{ (không đổi)}$$

Do đó K thuộc cung chứa góc 120° dựng trên đoạn AB (cung $\widehat{AKB}$).

1. $\triangle ABC$ có $\hat{A} = \alpha$ không đổi, cạnh BC cố định. Tìm tập hợp các giao điểm của ba tia phân giác trong của tam giác.

Hướng dẫn : Gọi I là giao điểm của các tia phân giác trong của góc B và C, ta có $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ không đổi. Vậy I nằm trên cung chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ vẽ trên đoạn BC (trừ B và C). Hai cung đối xứng nhau qua BC.

Phần đảo (ban tư làm).

2. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB. Điểm M di động trên nửa đường tròn. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C sao cho $MC = MB$. Chứng minh điểm C di động trên một cung tròn cố định.

Hướng dẫn : $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^0$,

MC = MB nên $\triangle BMC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ$ không đổi, nên C thuộc cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn AB.

Giới hạn : Khi M trùng A thì đường thẳng AC trở thành tiếp tuyến với nửa đường tròn (O). Vậy C thuộc cung BCE₀ (E₀ là giao điểm của tiếp tuyến tại A và cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn AB).

3. Cho hai điểm A, B cố định trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Điểm C di động trên cung lớn AB. Trên tia đối của tia CA lấy D sao cho $CD = CB$. Tìm quỹ tích các điểm D.

Hướng dẫn : Ta có $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 120^\circ$

$$\Delta CBD \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{CBD} = 30^\circ$$

Do đó D thuộc cung chứa góc 30° vẽ trên đoạn AB.

§7. Tứ giác nội tiếp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tứ giác có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn đó. Đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp.

Định lý : Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng nhau, bằng hai góc vuông.

Định lý đảo : Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng nhau, bằng hai góc vuông thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A kẻ hai đường thẳng cắt đường tròn tại C và D, cắt tiếp tuyến của đường tròn vẽ qua B tại E và F.

- Chứng minh các điểm C, E, F, D cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh : $FB^2 = FA.FD$.

Giải

- Nối B với D có :

$$\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AD}),$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{F}_1 \text{ (cùng phụ với } \widehat{DBF}),$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{F}_1.$$

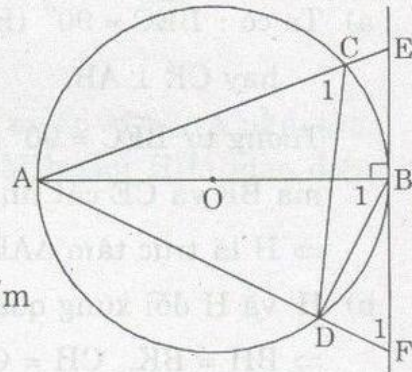
Do đó tứ giác CEFD nội tiếp hay bốn điểm C, E, F, D cùng thuộc một đường tròn.

Cách giải khác :

$$\widehat{F} = \frac{sđ\widehat{AB} - sđ\widehat{BD}}{2} = \frac{sđ\widehat{AD}}{2} \text{ (góc có đỉnh bên ngoài)}$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{sđ\widehat{AD}}{2} \text{ (góc nội tiếp)} \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{C}_1.$$

- $\triangle ABF$ vuông (tính chất tiếp tuyến) có BD là đường cao nên $FB^2 = FA.FD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).



ĐỀ SỐ 2

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), xy là tiếp tuyến tại A của đường tròn. Một đường thẳng song song với xy cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp.

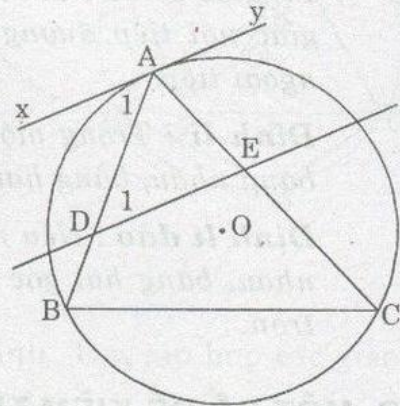
Giải

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$xy \parallel DE \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (so le trong)

Do đó $\widehat{D_1} = \widehat{C}$

Vậy tứ giác BDEC nội tiếp.



ĐỀ SỐ 3

Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và F. BF, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh tứ giác ABKC nội tiếp.

Giải

a) Ta có : $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (BC là đường kính)
hay $CE \perp AB$.

Tương tự $\widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp AC$
mà BF và CE cắt nhau tại H.
 $\Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle ABC$.

b) H' và H đối xứng qua BC

$\Rightarrow BH = BK, CH = CK$

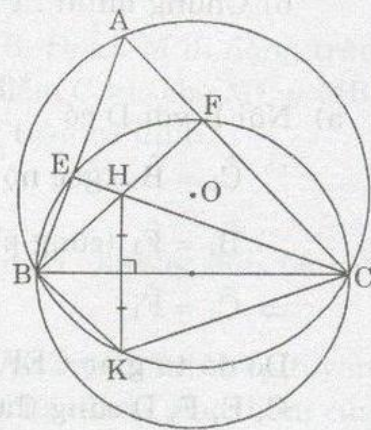
Từ đó hai tam giác BHC và BKC bằng nhau (c.c.c)

$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BHC} \\ \text{mà } \widehat{BHC} = \widehat{EHF} \text{ (đối đỉnh)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{EHF}$

Mặt khác ta có tứ giác AEHF nội tiếp ($\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EHF} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{A} + \widehat{BKC} = 180^\circ$. Vậy tứ giác ABKC nội tiếp.



ĐỀ SỐ 4

Cho tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong của hai góc B và C và J là giao điểm các phân giác ngoài của hai góc đó.

- Chứng minh BICJ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng ba điểm A, I, J thẳng hàng.

Giải

- Ta có BI và CJ là phân giác của hai góc kề bù nên $BI \perp CJ$ hay $\widehat{IBJ} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{ICJ} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{IBJ} + \widehat{ICJ} = 180^\circ$$

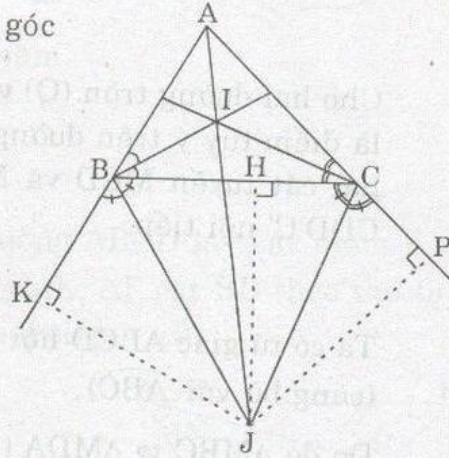
$\Rightarrow$ Tứ giác BICJ nội tiếp.

- Hạ JH, JK, JP lần lượt vuông góc với BC, AB, AC ta có :

$$JH = JK \text{ (tính chất phân giác)}$$

$$JH = JP \text{ (tính chất phân giác)}$$

$\Rightarrow JK = JP$ chứng tỏ J thuộc phân giác góc A. Do đó ba điểm A, I, J thẳng hàng.



ĐỀ SỐ 5

Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến MAB (A nằm giữa hai điểm M và B) và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi H là giao điểm của OM và CD.

- Chứng minh : $MC^2 = MA \cdot MB$.
- Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

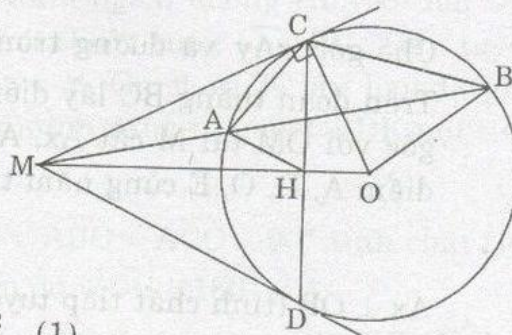
Giải

- Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MCB$ có :

$\widehat{M}$ chung, $\widehat{MCA} = \widehat{MBC}$ (góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó $\triangle MAC \sim \triangle MCB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC^2 \quad (1)$$



- b) Dễ thấy MO là đường trung trực của đoạn CD (vì $OC = OD = R$, $MC = MD$) nên $MO \perp CD$ tại H.

Trong tam giác vuông MCO có CH là đường cao.

Ta có : $MO.MH = MC^2$ (2) (hệ thức lượng trong Δ vuông)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA.MB = MO.MH$

Do đó $\Delta MAH \sim \Delta MOB$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$ chứng tỏ tứ giác AHOB nội tiếp.

ĐỀ SỐ 6

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Gọi M là điểm tùy ý trên đường thẳng AB, nằm ngoài đoạn AB. Vẽ qua M hai cát tuyến MCD và MC'D' với (O) và (O'). Chứng minh tứ giác CDD'C' nội tiếp.

Giải

Ta có tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBM}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$).

Do đó $\Delta MBC \sim \Delta MDA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

$$\Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

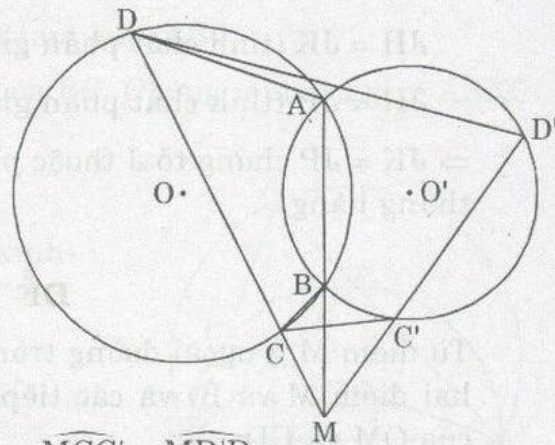
Chứng minh tương tự :

$$MA.MB = MC'.MD'$$

$$\Rightarrow MC.MD = MC'.MD'$$

Do đó $\Delta MCC' \sim \Delta MD'D$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MCC'} = \widehat{MD'D}$

Vậy tứ giác CDD'C' nội tiếp.



ĐỀ SỐ 7

Cho góc $\widehat{xAy}$ và đường tròn (O) tiếp xúc với Ax và Ay tại B và C. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M (khác B và C). Đường thẳng vuông góc với OM tại M cắt Ax, Ay lần lượt tại D và E. Chứng minh các điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Giải

$Ax \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBD} = 90^\circ$

$\widehat{DMO} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác OMBD nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM của đường tròn qua O, M, B, D)

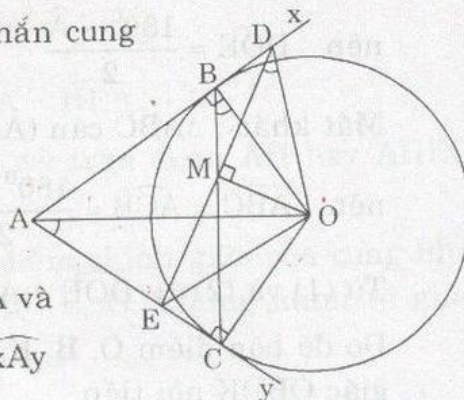
Ta lại có tứ giác ABOC nội tiếp nên

$$\widehat{OBM} = \widehat{OAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAC} \text{ hay } \widehat{ODE} = \widehat{OAE}.$$

Vì A, D ở cùng phía đối với EO nên A và D nằm trên một cung chứa góc $\frac{1}{2} \widehat{xAy}$

dựng trên OE hay A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.



ĐỀ SỐ 8

Trên các cạnh BC và CD của hình vuông ABCD lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Các đoạn thẳng AE, AF cắt BD theo thứ tự ở H và K. Chứng minh tứ giác EHKF nội tiếp.

Giải

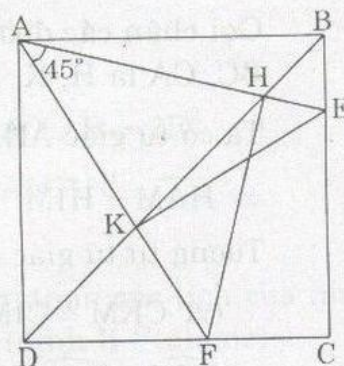
$$\text{Ta có } \widehat{EAF} = \widehat{BDC} = 45^\circ$$

Hai điểm A và D ở cùng phía với HF nên AD thuộc cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn HF.

Hay bốn điểm A, D, F, H cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác ADFH nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{AHF} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FHE} = 90^\circ.$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FKE} = 90^\circ$. Do đó EHKF là tứ giác nội tiếp.



ĐỀ SỐ 9

Cho đường tròn (O). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Gọi I và K lần lượt là giao điểm của OD, OE với BC. Chứng minh rằng tứ giác OBDK nội tiếp.

Giải

Dễ thấy tứ giác ABOC nội tiếp (vì $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OD, OE lần lượt là phân giác của hai góc kề $\widehat{BOM}$ và $\widehat{MOC}$

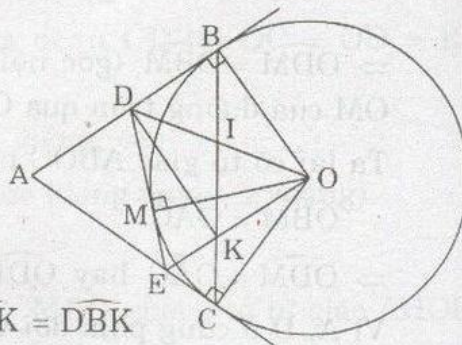
$$\text{nên } \widehat{DOE} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \quad (1)$$

Mặt khác : $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$)

$$\text{nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{DOK} = \widehat{DBK}$

Do đó bốn điểm O, B, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay tứ giác OBDK nội tiếp.



ĐỀ SỐ 10

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Từ một điểm bất kì trên đường tròn hạ các đường vuông góc xuống các cạnh. Chứng minh rằng chân ba đường vuông góc này thẳng hàng (đường thẳng Sim-Son).

Giải

Gọi chân các đường vuông góc hạ từ M lần lượt xuống các cạnh AB, BC, CA là H, K, I.

Ta có tứ giác AHMI nội tiếp (vì có $\widehat{AHM} + \widehat{AIM} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{HIM} \quad (1) \quad (\text{góc nội tiếp chắn cung MH})$$

Tương tự tứ giác CKIM nội tiếp

$$(\text{vì } \widehat{CKM} = \widehat{CIM} = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{MIK} + \widehat{MCK} = 180^\circ \quad (2)$$

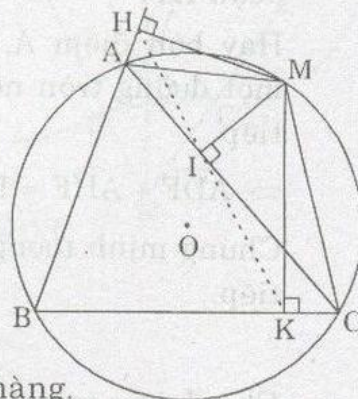
Mặt khác ABCM nội tiếp (O)

$$\text{nên } \widehat{HAM} = \widehat{MCK}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{HIM} = \widehat{MCK}$$

$$\text{Do đó } \widehat{MIK} + \widehat{HIM} = 180^\circ \Rightarrow H, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Trường hợp M thuộc các cung còn lại chứng minh tương tự.



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. $\triangle ABC$ vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH, D là điểm đối xứng của B qua H. Đường tròn tâm H, bán kính HA cắt tia AD tại E. Chứng minh tứ giác AHEC nội tiếp.

Hướng dẫn : $AC > AB \Rightarrow HC > HB \Rightarrow HC > HD$

$\triangle ADB$ cân nên AH là phân giác : $\widehat{BAH} = \widehat{DAH}$

$\triangle ABC$ vuông nên $\widehat{BCA} = \widehat{BAH} = \widehat{HAD}$

$\triangle AHE$ cân $\Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{HEA}$. Vậy $\widehat{BCA} = \widehat{HEA}$.

E và C thuộc cung chứa góc $90^\circ - \widehat{B}$ vẽ trên đoạn AH hay AHEC nội tiếp.

2. Cho đường tròn (O) dây AB và I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ dây IC, ID lần lượt cắt AB tại E, G. Chứng minh tứ giác CDGE nội tiếp.

Hướng dẫn : Ta có $\triangle AIC \sim \triangle EIA$

$$sd\widehat{IAE} = \frac{1}{2}sd\widehat{IB} = \frac{1}{2}sd\widehat{IA} = sd\widehat{ACI} \Rightarrow \frac{AI}{IE} = \frac{IC}{AI} \Rightarrow AI^2 = IE \cdot IC$$

Chứng minh tương tự $AI^2 = IG \cdot ID \Rightarrow IE \cdot IC = IG \cdot ID$

Vậy bốn điểm E, C, D, G thuộc một đường tròn.

3. Cho hai đường kính AB, CD của đường tròn (O; R) vuông góc với nhau, MN là một dây cung sao cho AM và AN cắt CD tại M' và N'. Chứng minh tứ giác MM'NN' nội tiếp.

Hướng dẫn : Ta có tứ giác BOM'M nội tiếp

(vì $\widehat{BOM'} = \widehat{BMM'} = 90^\circ$) nên $AM \cdot AM' = AO \cdot AB = 2R^2$.

Tương tự $AN \cdot AN' = 2R^2$. Vậy $AM \cdot AM' = AN \cdot AN'$.

Từ đó MM'NN' là tứ giác nội tiếp.

4. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tổng các tích của hai cạnh đối nhau bằng tích của hai đường chéo (định lý Ptôlême).

Hướng dẫn : Vẽ tia AE hợp với AB một góc $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ ($E \in BD$)

$$\text{Xét } \triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự : } \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DE \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED) = AC \cdot BD \text{ (đpcm).}$$

5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại E và hai đường thẳng AB, DC cắt nhau tại F. Chứng minh : $EA \cdot ED + FA \cdot FB = EF^2$.

Hướng dẫn : Vẽ đường tròn nội tiếp $\triangle AEB$ cắt EF tại M.

$$\text{Chứng minh } EA \cdot ED = EF \cdot EM; FA \cdot FB = EF \cdot MF.$$

6. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B cắt (O) và (O') tại C và D.

a) Chứng tỏ $\widehat{CAD}$ có số đo không đổi.

b) Tiếp tuyến của (O) tại C và (O') tại D cắt nhau tại E. Chứng tỏ

Hướng dẫn : a) Ta có $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ADB}$ không đối (chấn $\widehat{AB}$ cố định)

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ADB}) \text{ không đổi.}$$

$$\text{b) Ta chứng minh } \widehat{ACB} + \widehat{DCE} + \widehat{ADB} + \widehat{CDE} = 180^\circ.$$

7. $\triangle ABC$ vuông tại A và $AC = 3AB$. Trên cạnh AC lấy hai điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua D. Chứng minh tứ giác ABCM nội tiếp.

Hướng dẫn : Chứng minh $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp một đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.
- Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ hình vuông ABCD nội tiếp và tính cạnh của hình vuông theo R.

Giải

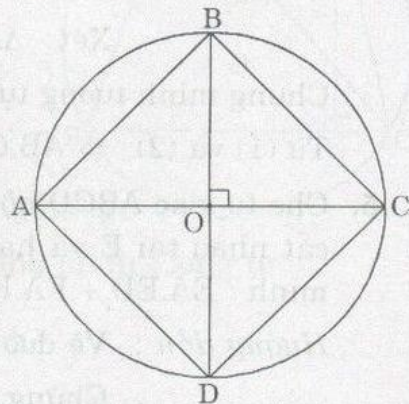
Vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Nối A, B, C, D ta được hình vuông.

Thật vậy : các tam giác vuông AOB, BOC, COD và DOA bằng nhau nên $AB = BC = CD = DA$. Do đó ABCD là hình thoi.

Mặt khác $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (AC là đường kính) nên hình thoi ABCD là hình vuông.

Xét tam giác vuông AOB, ta có : $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$

Vậy cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $R\sqrt{2}$.



ĐỀ SỐ 2

Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ tam giác đều nội tiếp và hãy tính cạnh của tam giác theo R .

Giải

(Xem hình bên). Trên đường tròn $(O; R)$ lấy lần lượt các dây cung

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA (= R)$$

Nối A với C , C với E , E với A , ta được $AC = CE = EA$. Do đó $\triangle ACE$ đều.

Ta đã biết : Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm tam giác. Ta có :

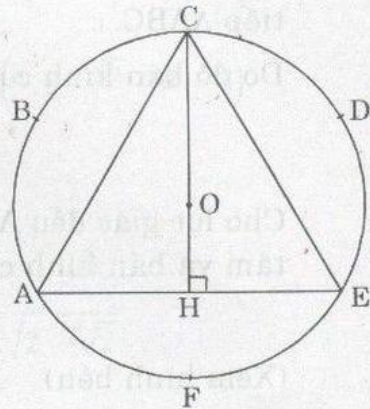
$$\begin{aligned} CH &= CO + OH = R + \frac{R}{2} \text{ (tính chất trọng tâm)} \\ &= \frac{3R}{2} \end{aligned}$$

$\triangle AHC$ vuông ta có :

$$AH = CH \cdot \cot A = \frac{3R}{2} \cdot \cot 60^\circ = \frac{3R}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AE = R\sqrt{3}.$$

Vậy cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $R\sqrt{3}$.



ĐỀ SỐ 3

Cho tam giác đều ngoại tiếp đường tròn $(I; r = 2\text{cm})$.

a) Tính cạnh của tam giác đều.

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

a) (Xem hình bên).

Ta có BM, BP là hai tiếp tuyến với đường tròn $(I; r)$ nên BI là phân giác của $\widehat{ABC}$

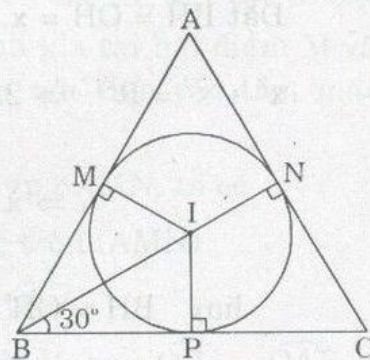
$$\Rightarrow \widehat{IBP} = 30^\circ.$$

Xét tam giác vuông IBP , ta có :

$$BP = IP \cdot \cot 30^\circ = r\sqrt{3}$$

$$\text{Do đó : } BC = 2r\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Vậy cạnh của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn $(I; r = 2\text{cm})$ là $4\sqrt{3} \text{ cm}$.



b) $\triangle IBP$ vuông tại P có $\widehat{IBP} = 30^\circ$ nên $BI = 2IP = 2r = 2.2 = 4$ (cm)

Tương tự ta tính được $AI = CI = 4$ (cm)

$\Rightarrow AI = BI = CI = 4$ (cm) nên I chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Do đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là 4 (cm).

ĐỀ SỐ 4

Cho lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O; R). Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp lục giác theo R.

Giải

(Xem hình bên)

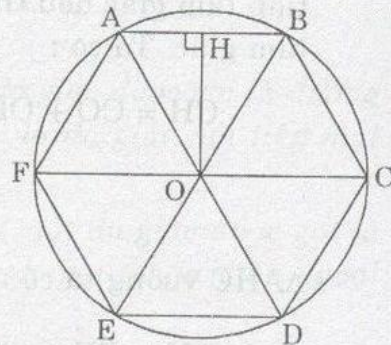
Ta có cạnh của lục giác đều bằng R.

$$\triangle AOB \text{ đều cạnh } R \Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh tương tự : O cách đều các cạnh của lục giác.

Vậy O là tâm của đường tròn nội tiếp

lục giác đều và OH là bán kính $OH = r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



ĐỀ SỐ 5

Tính cạnh bát giác đều nội tiếp trong đường tròn (O; R).

Giải

Gọi cạnh của hình bát giác đều là AB.

Kẻ $BH \perp AO$. Ta có $\triangle BHO$ vuông cân $\Rightarrow BH = OH$.

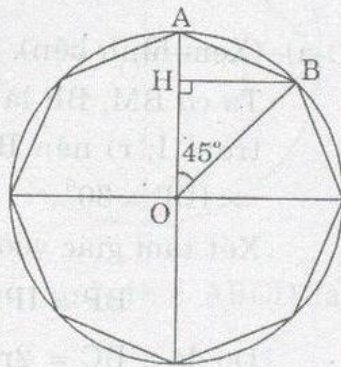
Đặt $BH = OH = x$. Theo định lí Py-ta-go :

$$x^2 + x^2 = R^2 \Rightarrow 2x^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{hay } BH = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó } AH = R - OH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = R \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$$



Xét tam giác vuông AHB có :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 = \left[R \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{R^2}{4} (4 - 4\sqrt{2} + 2) + \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{4} (4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2) \\ &= \frac{R^2}{4} \cdot 4(2 - \sqrt{2}) = R^2(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Vậy cạnh bát giác đều nội tiếp (O; R) là $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Tính cạnh của đa giác đều 12 cạnh, nội tiếp trong đường tròn (O; R).

Hướng dẫn : Gọi AB là cạnh của đa giác đều, ta có $\widehat{AOB} = 30^\circ$.

Kẻ $BH \perp OA$ ta có $\triangle BHO$ là nửa tam giác đều

$$\text{nên } OH = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ và } BH = \frac{1}{2}OB = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow AH = AO - OH = R \frac{(2 - \sqrt{3})}{2}$$

Xét tam giác vuông BHA, ta có :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = \left(\frac{R}{2} \right)^2 + \left[\frac{R(2 - \sqrt{3})}{2} \right]^2 = R^2(2 - \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

2. Cho góc nhọn xOy , một điểm A cố định trên tia Ox, xét tất cả các đường tròn tiếp xúc với Ox tại A và cắt cạnh kia tại hai điểm M và N. Chứng minh rằng tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác AMN nằm trên một đường cố định.

Hướng dẫn : Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMN$, ta có :

$$\widehat{MAI} = \widehat{NAI} \text{ mà } \triangle AMN \text{ nội tiếp đường tròn (AMN)}$$

$$\text{nên } \widehat{OAM} = \widehat{ONA} \Rightarrow \widehat{MAI} + \widehat{OAM} = \widehat{NAI} + \widehat{ONA}$$

$$\text{mà } \widehat{NAI} + \widehat{ONA} = \widehat{OPA} \Rightarrow \widehat{OPA} = \widehat{MAI} + \widehat{OAM} \text{ hay } \widehat{OPA} = \widehat{OAP}$$

$\triangle OPA$ cân tại O. A, O cố định $\Rightarrow P$ cố định. Vậy I nằm trên đường thẳng AP cố định.

§9. Độ dài đường tròn, cung tròn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Công thức tính độ dài đường tròn :

$$C = 2\pi R \quad (C : \text{độ dài đường tròn}; R : \text{bán kính đường tròn})$$

$$C = \pi d \quad (d : \text{đường kính})$$

- Công thức tính độ dài cung tròn :

$$l = \frac{\pi R n}{180^\circ} \quad (R : \text{bán kính}; l : \text{độ dài cung } n^\circ)$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác cân ABC có $\widehat{B} = 120^\circ$, $AC = 6\text{cm}$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

$$\text{Ta có : } BA = BC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Vẽ đường cao BH ta có BH đồng thời là trung tuyến hay $HA = HC = 3\text{cm}$.

Trong tam giác vuông ABH ta có :

$$AB = \frac{AH}{\cos 30^\circ} \Rightarrow AB = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

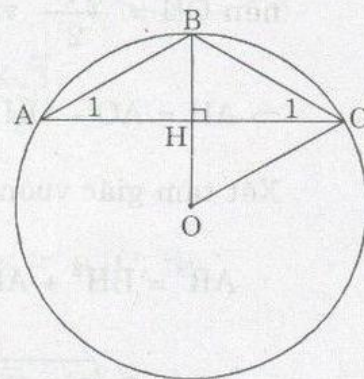
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ta có :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Vậy tam giác BOC đều $\Rightarrow AB = BC = OB = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

Độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là :

$$C = 2\pi R = 2\pi 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$



ĐỀ SỐ 2

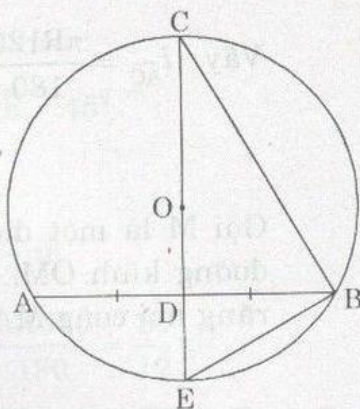
Cho đường tròn (O) và dây cung $AB = 6\text{cm}$. Gọi D là trung điểm của dây AB, đường kính CE qua D biết $CD = 9\text{cm}$. Tính độ dài đường tròn (O).

Giải

Ta có $\widehat{CBE} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn)

D là trung điểm của AB

$\Rightarrow OD \perp AB$ (định lý đường kính dây cung)
 Tam giác vuông CBE có đường cao BD nên
 $BD^2 = CD.DE$
 $\Rightarrow 3^2 = 9.DE \Rightarrow DE = 1 \text{ (cm)}$
 Do đó :
 $CE = CD + DE = 9 + 1 = 10 \text{ (cm)}$
 Độ dài đường tròn : $\pi.CE = 10\pi$.



ĐỀ SỐ 3

Cho ba điểm A, B, C liên tiếp trên một đường thẳng. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính AB và BC.

Giải

Gọi C_1 là độ dài đường tròn đường kính AC, C_2, C_3 lần lượt là độ dài các đường tròn đường kính AB và BC.

Ta có : $C_1 = \pi.AC$;

$C_2 = \pi.AB$;

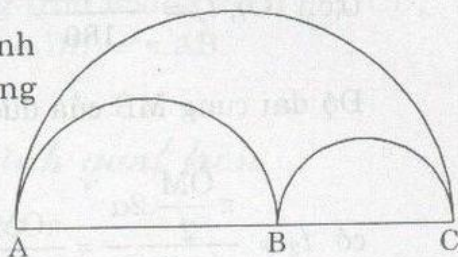
$C_3 = \pi.BC$

Vì B nằm giữa A và C nên $AC = AB + BC$

Vậy $C_2 + C_3 = \pi AB + \pi BC = \pi(AB + BC) = \pi AC$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{2} = \frac{C_2 + C_3}{2}$$

Nghĩa là độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



ĐỀ SỐ 4

Cho đường tròn (O; R).

a) Tính AOB biết độ dài cung AB là $\frac{5\pi R}{6}$.

b) Lấy một điểm C trên cung lớn AB sao cho $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính độ dài các cung nhỏ AC và BC.

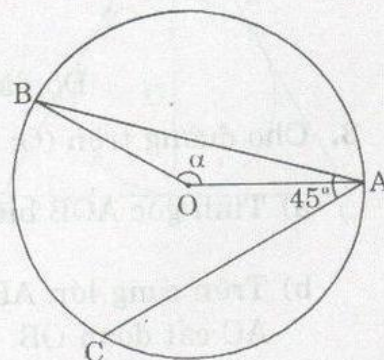
Giải

a) Đặt $\widehat{AOB} = \alpha \Rightarrow l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \alpha}{180}$

$$\Rightarrow \frac{5\pi R}{6} = \frac{\pi R \alpha}{180} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

b) Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = 360^\circ - (150^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$



$$\text{Vậy } l_{\widehat{AC}} = \frac{\pi R 120}{180} = \frac{2\pi R}{3}; \quad l_{\widehat{BC}} = \frac{\pi R 90}{180} = \frac{\pi R}{2}.$$

ĐỀ SỐ 5

Gọi M là một điểm nằm trên đường tròn (O). Vẽ đường tròn (O') đường kính OM. Bán kính OA của (O) cắt (O') tại B. Chứng minh rằng hai cung MA và MB bằng nhau.

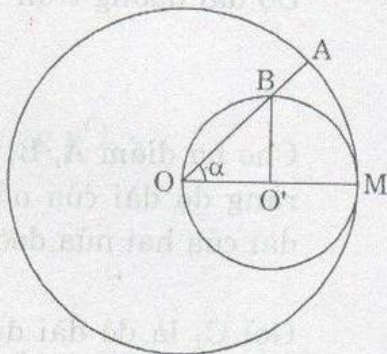
Giải

$$\text{Đặt } \widehat{MOA} = \alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{MO'B} = 2\alpha \text{ (góc ngoài của } \triangle OO'B)$$

Gọi l_1 là độ dài cung MA của đường

$$\text{tròn (O), } l_1 = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180}$$



Độ dài cung MB của đường tròn (O') bán kính $\frac{OM}{2}$:

$$\text{có } l_2 = \frac{\pi \cdot \frac{OM}{2} \cdot 2\alpha}{180} = \frac{\pi OM \alpha}{180}. \text{ Vậy } l_1 = l_2 \text{ (đpcm).}$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Tính độ dài cung căng dây là cạnh một ngũ giác đều nội tiếp đường tròn (O; R).

Hướng dẫn : Cung căng dây là cung ngũ giác đều có số đo :

$$360^\circ : 5 = 72^\circ. \text{ Độ dài cung này là } \frac{\pi R \cdot 72}{180} = \frac{2\pi R}{5} \text{ (đvdd).}$$

2. Cho đường tròn (O), dây cung AB = 6cm. Gọi D là trung điểm của dây AB, đường kính qua D sao cho O thuộc đoạn thẳng CD. Biết CD = 9cm. Tính độ dài đường tròn (O).

Hướng dẫn : Ta có $BD^2 = CD \cdot CE$ hay $3^2 = 9 \cdot DE \Rightarrow DE = 1 \text{ (cm)}$

$$CE = CD + DE = 9 + 1 = 10 \text{ (cm)}$$

$$\text{Độ dài đường tròn : } \pi \cdot CE = 10\pi \text{ (cm).}$$

3. Cho đường tròn (O; R).

a) Tính góc AOB biết độ dài cung là $\frac{\pi R}{4}$.

b) Trên cung lớn AB, lấy điểm C sao cho $\triangle AOC$ là tam giác đều và AC cắt đoạn OB. Tính độ dài cung lớn AC và BC.

Hướng dẫn : a) Gọi x là số đo cung nhỏ AB , ta có :

$$\frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R x}{180} \Rightarrow x = 45 \Rightarrow \widehat{AOB} = 45^\circ$$

b) $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow$ số đo cung lớn AC là 300° .

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ; l_{\widehat{AC}} = \frac{\pi R 300}{180} = \frac{5}{3} \pi R$$

$$\text{Do đó } \widehat{BC} = 360^\circ - 15^\circ = 345^\circ \Rightarrow l_{\widehat{BC}} = \frac{\pi R 345}{180} = \frac{23}{12} \pi R.$$

4. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Trên AB lấy hai điểm C và D (C nằm giữa A và D). Vẽ các nửa đường tròn đường kính AC , CD , DB . Chứng minh tổng độ dài của ba nửa đường tròn này bằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AB .

Hướng dẫn : Tổng độ dài ba nửa đường tròn đường kính AC , CD , DB là : $\pi AC + \pi CD + \pi BD = \pi(AC + CD + DB) = \pi AB$.

§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Diện tích hình tròn : $S = \pi R^2$ (R là bán kính hình tròn)
- Diện tích hình quạt tròn n° : $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ hoặc $S = \frac{lR}{2}$.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Tính diện tích hình tròn nội tiếp một tam giác đều có cạnh là a .

Giải

Gọi AH là đường cao.

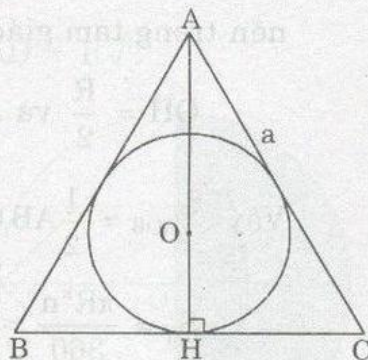
Ta đã biết : Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm tam giác.

$$\text{Ta có : } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì O là trọng tâm tam giác nên

$$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Vậy } S_{\text{hình tròn}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$



ĐỀ SỐ 2

Tính theo a diện tích hình tròn (O).

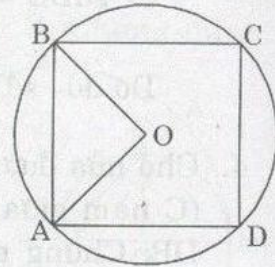
- a) Biết độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn (O) là a.
b) Biết độ dài cạnh của tam giác đều nội tiếp của đường tròn (O) là a.

Giải

- a) Ta có : $AB = R\sqrt{2}$ (cạnh hình vuông nội tiếp (O; R))

$$\text{hay } a = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

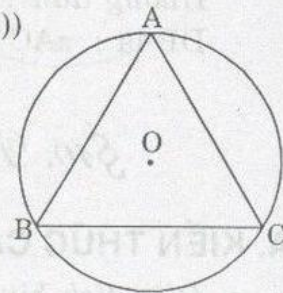
$$\text{Do đó } S_{\text{hình tròn}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{2} \text{ (đvdt)}$$



- b) $AB = R\sqrt{3}$ (cạnh của tam giác đều nội tiếp (O; R))

$$\text{hay } a = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó } S_{\text{hình tròn}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{3} \text{ (đvdt).}$$



ĐỀ SỐ 3

Hình viên phân là phần hình tròn bao gồm giữa một cung và dây trương cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB theo R. Biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và bán kính hình tròn là R.

Giải

Kẻ đường cao OH.

$$\text{Ta có } \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 30^\circ$$

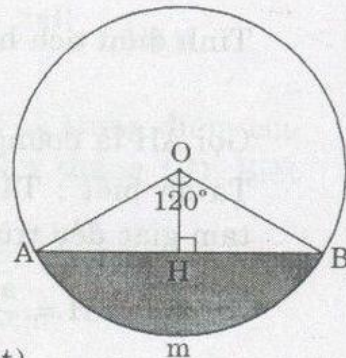
nên trong tam giác vuông AHO, ta có

$$OH = \frac{R}{2} \text{ và } AH = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Do đó : } S = S_q - S_{AOB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \text{ (đvdt).}$$



ĐỀ SỐ 4

Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ nửa đường tròn đường kính BC . Hãy tính diện tích phần hình tròn nằm ở miền ngoài của tam giác.

Giải

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của nửa đường tròn đường kính BC với hai cạnh AB và AC .

$\triangle BOM$ cân có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{BOM} = 60^\circ \Rightarrow sđ\widehat{BM} = 60^\circ \text{ và } OB = \frac{a}{2}$$

Do đó diện tích hình quạt tròn BOM là :

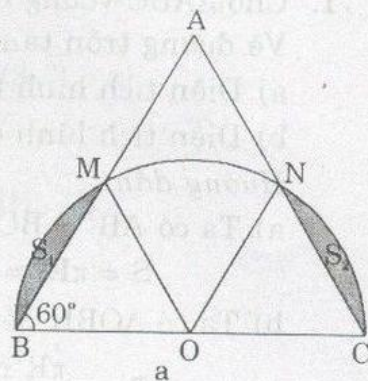
$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi a^2}{24} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{BOM} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Vậy } S_1 = S_q - S_{BOM} = \frac{\pi a^2}{24} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{48}$$

Dễ thấy $S_1 = S_2$. Vậy diện tích phần hình tròn nằm ngoài của tam

$$\text{giác là : } S = \frac{2 \cdot a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{48} = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{24}$$



ĐỀ SỐ 5

Cho hình tròn $(O; R)$ hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Dựng cung tròn tâm A bán kính AC . Tính diện tích hình quạt ACD và hình "trăng khuyết" (tô đậm).

Giải

Ta có $\triangle AOC$ vuông cân có cạnh $R \Rightarrow AC = AD = R\sqrt{2}$

và $\widehat{CAD} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn)

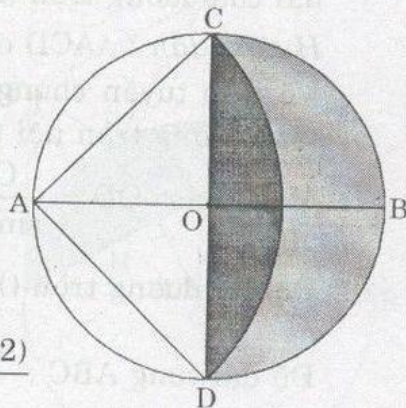
Do đó diện tích hình quạt ACD là :

$$\frac{\pi(R\sqrt{2})^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\text{Lại có } S_{ACD} = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = R^2$$

$\Rightarrow$ Diện tích hình viên phân CmD là :

$$S_{\text{quạt}} - S_{ACD} = \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = \frac{R^2(\pi - 2)}{2}$$



Diện tích (O; R) là $\pi R^2 \Rightarrow$ diện tích nửa đường tròn (O; R) là $\frac{\pi R^2}{2}$.

Từ đó diện tích hình "trăng khuyết" CBDm là :

$$\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2(\pi - 2)}{2} = R^2.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết $BC = 8\text{cm}$ và $BH = 2\text{cm}$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB. Tính :

- a) Diện tích hình tròn (O).
b) Diện tích hình quạt tròn AOH (ứng với cung nhỏ AH).

Hướng dẫn :

- a) Ta có $AB^2 = BC \cdot BH$, ta được $AB = 4\text{ (cm)}$, vậy $R = 2\text{ (cm)}$
 $S = \pi R^2 = 4\pi\text{ (cm}^2\text{)}.$

- b) Ta có $\triangle OBH$ đều cạnh $2\text{cm} \Rightarrow \widehat{BOH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOH} = 120^\circ$

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{4\pi}{3}\text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Vẽ các đường tròn tâm A, B, C bán kính bằng a. Tính diện tích phần chung của ba hình tròn.

Hướng dẫn : Mỗi hình quạt (chẳng hạn tâm A, cung BC) có diện tích bằng $\frac{1}{6}$ diện tích hình tròn, tức là bằng $\frac{\pi a^2}{6}$. Vậy diện tích

phần chung của ba hình tròn chính là 3 lần diện tích một hình quạt trừ đi 2 lần diện tích tam giác ABC.

$$\text{Đáp số : } \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

3. Trên đường tròn (O) lấy cung AC có số đo 120° . Vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau tại D. Gọi P là tâm đường tròn tiếp xúc với (O) tại B và tiếp xúc với DA, AC. Chứng minh rằng độ dài của đường tròn (P) bằng độ dài cung ABC của đường tròn (O).

Hướng dẫn : $\triangle ACD$ có $DA = DC$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Vẽ tiếp tuyến chung EG tại B, ta có tam giác DEC đều nên P là tâm đường tròn nội tiếp đồng thời là trọng tâm $\triangle DEG$.

$$\text{Mặt khác : } OD = \frac{OA}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow DB = R \Rightarrow PB = \frac{1}{3}DB = \frac{R}{3}$$

$$\text{Độ dài đường tròn (P) : } \frac{2\pi R}{3}$$

$$\text{Độ dài cung ABC : } \frac{\pi R \cdot 120}{180} = \frac{2\pi R}{3}.$$

4. Cho hình tròn (O) và điểm A sao cho $OA = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là hai tiếp điểm). Tính diện tích phần của tứ giác OBAC nằm ngoài hình tròn (O).

Hướng dẫn : $\triangle ABO$ vuông có $OA = 2R$ nên là nửa tam giác đều nên $\widehat{BOA} = 60^\circ$ và $AB = R\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$.

$$S_{BOAC} = 2S_{OBA} = 2 \cdot \frac{OB \cdot AB}{2} = R^2 \sqrt{3} \quad \text{và} \quad S_q = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{180} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\text{Do đó : } S = S_{OBAC} - S_q = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi).$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT

ĐỀ SỐ 1

Cho đường tròn (O) đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) và AC là dây cung (C khác B). Tia phân giác của $\widehat{xAC}$ cắt đường tròn (O) tại D, AD và BC cắt nhau tại E. Gọi K và F lần lượt là giao điểm của BD với AC và Ax.

- Chứng minh $\triangle ABE$ cân.
- Chứng minh tứ giác AKEF là hình thoi và $EK \perp AB$.
- Cho $\widehat{xAC} = 60^\circ$.
 - Chứng minh $DB \cdot DK = R^2$ và ba điểm O, K, E thẳng hàng.
 - Tính diện tích tứ giác ACEF phần nằm ngoài đường tròn.

Giải

- a) Ta có AD là phân giác của $\widehat{xAC}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{DA} = \widehat{DC}$

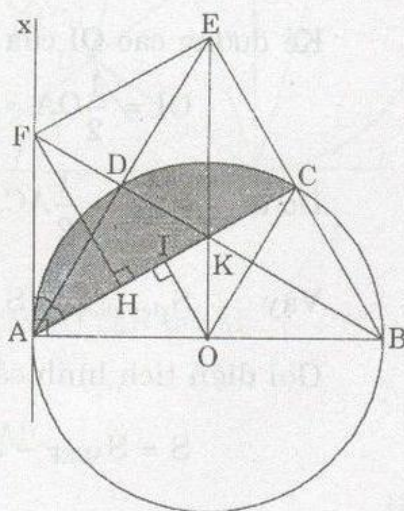
Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ hay BD là phân giác của $\widehat{ABC}$.

Lại có $BD \perp AD$ (AB là đường kính)

$\triangle ABE$ có phân giác BD đồng thời là đường cao nên $\triangle ABE$ cân tại B.

- b) Xét $\triangle AFK$ có AD là phân giác đồng thời là đường cao nên $\triangle AFK$ cân tại A $\Rightarrow AD$ cũng là đường trung tuyến hay $DF = DK$.

Lại có $DA = DE$ ($\triangle ABE$ cân).



Do đó tứ giác EKAF là hình bình hành, có hai đường chéo $FK \perp AE$ nên EKAF là hình thoi.

$\Rightarrow EK \parallel FA$ mà $FA \perp AB$ (gt) $\Rightarrow EK \perp AB$.

c) • Ta có : $\widehat{xAC} = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{xAD} = \widehat{DAK} = 30^\circ$

$$\text{Do đó } \triangle ADK \sim \triangle BDA \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DK}{DA} \Rightarrow DA^2 = DB \cdot DK$$

$\triangle ABD$ vuông có $\widehat{DAB} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow DA = R$

Vậy $DB \cdot DK = R^2$.

Dễ thấy K, E thuộc trung trực của AB nên O, K, E thẳng hàng.

• Ta có $\triangle ABC$ vuông (AB là đường kính) có $\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow CB = R$.

$$\text{Do đó } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } \triangle AOK \sim \triangle ACB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AO}{AC}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AO}{AC} = \frac{2R \cdot R}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Mặt khác $\triangle AFK$ đều (cân có $\widehat{AFK} = 60^\circ$): $AF = AK = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Kẻ } FH \perp AC \text{ có } FH = AF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = R$$

Dễ thấy tứ giác ACEF là hình thang ($AC \parallel EF$) nên

$$S_{ACEF} = \frac{(AC + EF) \cdot FH}{2} = \frac{\left(R\sqrt{3} + \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) R}{2} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{6}$$

Ta có $\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COA} = 120^\circ$

Khi đó hình quạt OAC có diện tích là : $\frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$.

Kẻ đường cao OI của tam giác AOC, ta có :

$$OI = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} \text{ (vì } \triangle AOI \text{ là nửa tam giác đều)}$$

$$\text{Do đó : } S_{AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OI = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } S_{\text{viên phân}} = S_q - S_{AOC} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Gọi diện tích hình cần tính là S, ta có :

$$S = S_{ACEF} - S_{vp} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{6} - \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2(13\sqrt{3} - 4\pi)}{12}$$

ĐỀ SỐ 2

1. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm), cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) và O nằm trong góc AMC. Lấy I là trung điểm của BC. Tia OI cắt cung nhỏ BC tại N, AN cắt BC tại D.
 - a) Chứng minh AD là phân giác của góc BAC.
 - b) Chứng minh : $MD^2 = MB.MC$.
 - c) Gọi H, K là hình chiếu của N lên AB và AC. Chứng tỏ ba điểm H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Sim-Son).
2. Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A vẽ đường thẳng cắt (O) tại B và cắt (O') tại C.
 - a) Chứng tỏ $OB \parallel O'C$.
 - b) Chứng tỏ tỉ số diện tích hai hình quạt nằm trong góc ở tâm $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AO'C}$ của hai hình tròn không đổi khi cát tuyến BAC quay quanh A.

Giải

1. a) I là trung điểm BC $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{NB} = \widehat{NC}$

Do đó $\widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ hay AD là phân giác của góc BAC.

- b) Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCA$ có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây bằng góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Do đó $\triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MB.MC \quad (1)$$

Lại có $\widehat{MDA} = \frac{sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{NC}}{2}$

(góc có đỉnh bên trong đường tròn)

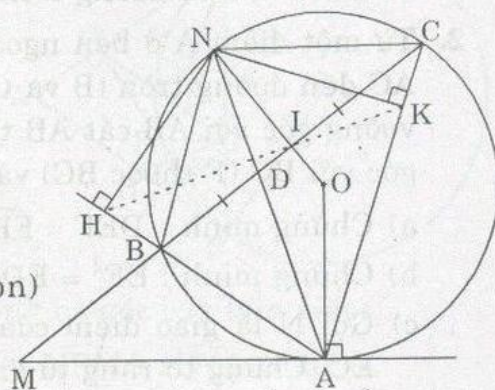
$$\widehat{MAN} = \frac{sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BN}}{2}$$

(góc giữa tiếp tuyến và một dây)

mà $\widehat{NC} = \widehat{NB} \Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAN}$ hay $\triangle MAD$ cân tại M

$$\Rightarrow MA = MD \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có : $MD^2 = MB.MC$.



c) Tứ giác HBIN nội tiếp ($\widehat{NHB} + \widehat{NIB} = 180^\circ$),

$$\widehat{HBN} = \widehat{HIN} \quad (1) \text{ (các góc nội tiếp cùng chắn cung HN)}$$

$$\text{mà } \widehat{HBN} = \widehat{ACN} \quad (2) \text{ (cùng bù với } \widehat{ABN})$$

Mặt khác tứ giác NIKC nội tiếp ($\widehat{NIC} = \widehat{NKC} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{ACN} + \widehat{NIK} = 180^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{HIN} + \widehat{NIK} = 180^\circ$ chứng tỏ ba điểm H, I, K thẳng hàng.

2. a) Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh)

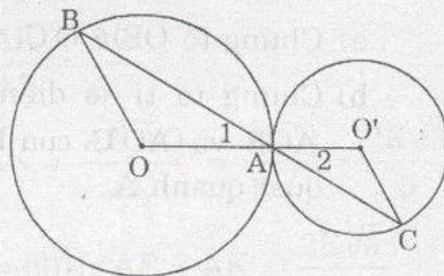
$$\triangle BOA \text{ cân} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}. \text{ Tương tự } \widehat{A}_2 = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$$

Do đó $OB \parallel O'C$ (cặp góc so le trong bằng nhau).

$$\text{b) Ta có : } S_{\widehat{AOB}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

$$S_{\widehat{AOC}} = \frac{\pi R'^2 n}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\widehat{AOB}}}{S_{\widehat{AOC}}} = \frac{R^2}{R'^2} \text{ (không đổi).}$$



ĐỀ SỐ 3

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn tại D.

a) Chứng tỏ $OD \perp BC$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính góc BIC.

2. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại D và cắt (O) tại E. Từ E vẽ EF vuông góc với BC (F thuộc BC) và EH vuông góc với AC (H thuộc AC).

a) Chứng minh : $\widehat{DEF} = \widehat{FEH}$.

b) Chứng minh : $EF^2 = ED.EH$.

c) Gọi N là giao điểm của DF và EB, M là giao điểm của FH và EC. Chứng tỏ rằng tứ giác MENF nội tiếp.

d) Cho $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính độ dài cung nhỏ BC và diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OB và OC.

Giải

1. a) Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt) $\Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{DC}$

$\Rightarrow OD \perp BC$ (đường kính đi qua điểm chính giữa của dây cung).

b) Ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ \quad (\hat{A} = 90^\circ \text{ vì BC là đường kính})$$

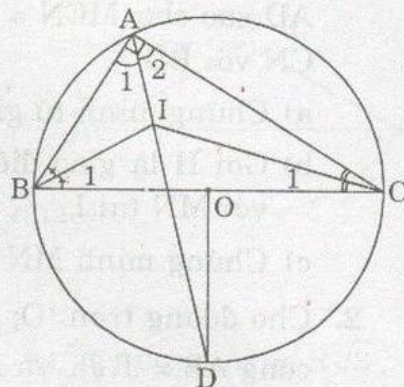
$$= 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 45^\circ \text{ hay } \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 45^\circ$$

Trong $\triangle BIC$ có :

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1)$$

$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$



2. a) Ta có tứ giác BDEF nội tiếp (vì $\widehat{BDE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{DBF} + \widehat{DEF} = 180^\circ$$

Tương tự tứ giác CHEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HCF} + \widehat{FEH} = 180^\circ$

mà $\widehat{DBF} = \widehat{HCF}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Do đó } \widehat{DEF} = \widehat{FEH} \quad (1)$$

b) Ta có $\widehat{EDF} = \widehat{EBF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EF)

$\widehat{EBF} = \widehat{ECH}$ (góc nội tiếp bằng góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung EC)

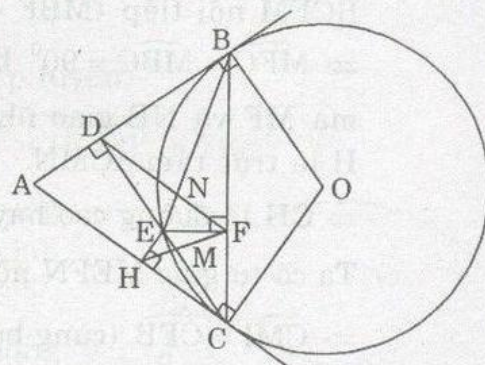
$\widehat{ECH} = \widehat{EFH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EH)

$$\text{Do đó } \widehat{EDF} = \widehat{EFH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$\triangle EFD \sim \triangle EHF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{EH} = \frac{ED}{EH} \Rightarrow EH^2 = ED \cdot EH.$$



c) Ta có $\widehat{EFM} = \widehat{EBC}$ (cmt),

$$\widehat{NFE} = \widehat{BCE} \text{ (cmt)}$$

mà $\widehat{NEM} + \widehat{BCE} + \widehat{EBC} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{NEM} + \widehat{NFE} + \widehat{EFM} = 180^\circ \text{ hay } \widehat{NEM} + \widehat{NFM} = 180^\circ$$

Do đó tứ giác MENF nội tiếp.

d) Dễ thấy tứ giác ABOC nội tiếp ($\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 150^\circ$$

$$\text{Vậy } l_{\widehat{BC}} = \frac{\pi R \cdot 150}{180} = \frac{5\pi R}{6} \quad \text{và} \quad S_q = \frac{\pi R^2 \cdot 150}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

ĐỀ SỐ 4

1. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AD sao cho $\widehat{MCN} = 45^\circ$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CM và CN với BD.
 a) Chứng minh tứ giác DCEN nội tiếp.
 b) Gọi H là giao điểm của MF và NE. Chứng minh CH vuông góc với MN tại I.
 c) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDIB .
2. Cho đường tròn (O; R) và ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{sđAC} = 30^\circ$, dây cung $AB = R\sqrt{3}$ và AB, AC ở về hai phía AO.
 a) Tính độ dài cung CAB theo R.
 b) Chứng minh : $OC \parallel AB$.

Giải

1. a) Ta có $\widehat{ECN} = \widehat{EDN} = 45^\circ \Rightarrow$ Bốn điểm D, C, E, N cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác DCEN nội tiếp.

- b) Tứ giác DCEN nội tiếp (cmt)

mà $\widehat{CDN} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{CEN} = 90^\circ$ hay $NE \perp CM$.

Tương tự ta chứng minh được tứ giác BCFM nội tiếp ($\widehat{MBF} = \widehat{MCF} = 45^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{MFC} = \widehat{MBC} = 90^\circ$ hay $MF \perp CN$

mà MF và NE giao nhau tại H nên H là trực tâm ΔCMN

$\Rightarrow CH$ là đường cao hay $CH \perp MN$.

- c) Ta có tứ giác MEFN nội tiếp ($\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^\circ$)

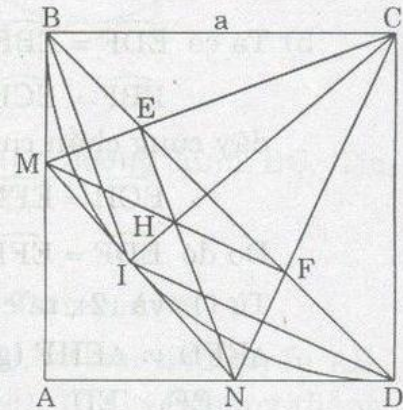
$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{CFB}$ (cùng bù với $\widehat{NFE}$)

Lại có tứ giác BCFM nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{CFB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{CMB}$

Do đó $\Delta CBM = \Delta CIM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CI = CB = a$ mà $MN \perp CH$ tại I (cmt) nên MN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDIB có tâm C và bán kính bằng a.



2. a) Ta có : $AB = R\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$

$\widehat{sđAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 30^\circ$. Vậy $\widehat{BOC} = 150^\circ$

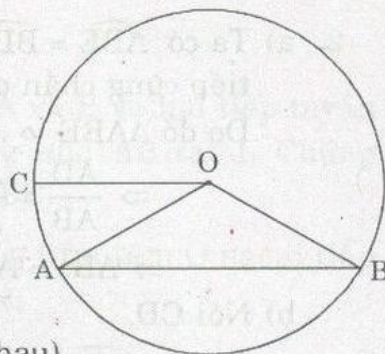
$$\text{Khi đó } l_{\widehat{BAC}} = \frac{\pi R \cdot 150}{180} = \frac{5\pi R}{6}$$

b) $\triangle AOB$ cân tại O có $\widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Do đó $\widehat{OAB} = \widehat{AOC} = 30^\circ$

$\Rightarrow OC \parallel AB$ (cặp góc so le trong bằng nhau).



ĐỀ SỐ 5

1. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R), lấy đoạn $AI = R\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài OI theo R.

b) Đường cao AH của $\triangle OAI$ cắt đường tròn (O) tại B. Chứng tỏ IB là tiếp tuyến của (O).

2. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Từ B vẽ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại D (D khác B). Đường thẳng AD cắt (O) tại E (khác D).

a) Chứng minh : $AB^2 = AE \cdot AD$

b) Chứng minh : $BC \cdot EC = AC \cdot BE$

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AC theo R.

Giải

1. a) $\triangle OAI$ vuông tại A (tính chất tiếp tuyến)

$$\text{Ta có : } OI = \sqrt{OA^2 + AI^2} = \sqrt{R^2 + (R\sqrt{3})^2} = 2R.$$

b) Có $OH \perp AB$ (gt) nên H là trung điểm của AB (định lý đường kính dây cung)

$\triangle AOB$ cân có đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

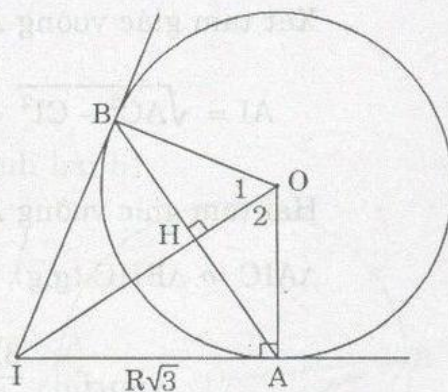
Xét $\triangle OBI$ và $\triangle OAI$ có :

OI cạnh chung, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cmt),

$OB = OA (= R)$.

Vậy $\triangle OBI = \triangle OAI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBI} = \widehat{OAI} = 90^\circ$

Chứng tỏ OB là tiếp tuyến của (O).



ĐỀ SỐ 6

1. Cho đường tròn $(O; R)$ dây $AB = R\sqrt{2}$. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến cắt nhau tại C. Đường thẳng OC cắt cung nhỏ AB tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
2. Cho hình bình hành ABCD ($\widehat{A} > 90^\circ$). Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC cắt DC tại M và cắt BD tại N.
 - a) Chứng tỏ : $AM = AD$.
 - b) Tính độ dài cung nhỏ MB theo R nếu góc ADC bằng 60° và $OA = R$.
 - c) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ : $IA^2 = IN \cdot IB$.
 - d) Chứng tỏ IA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AND$.

Giải

1. Ta có : $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$

Để thấy tứ giác ACBO là hình chữ nhật (ba góc vuông).

Lại có $OA = OB (= R)$ nên ACBO là hình vuông $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Mặt khác $\widehat{CAI} = \frac{1}{2}sd\widehat{AI}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$$\widehat{IAB} = \frac{1}{2}sd\widehat{BI} \text{ (góc nội tiếp)}$$

mà $\widehat{AI} = \widehat{BI} \Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{IAB}$ hay AI là tia phân giác của $\widehat{CAB}$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

2. a) Ta có tứ giác ABCM nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ABC} \text{ (cùng bù với } \widehat{AMC})$$

$$\text{mà } \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ (góc đối của hình bình hành)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADC}$$

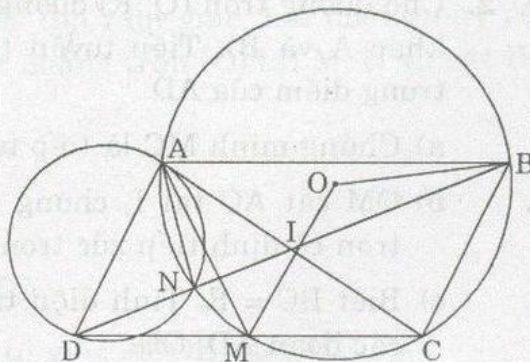
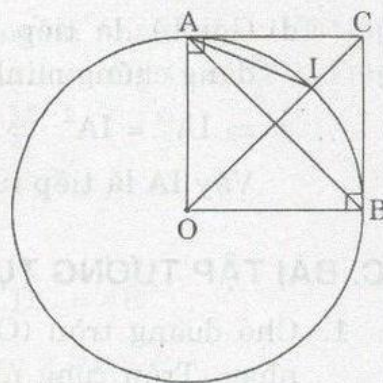
Do đó $\triangle ADM$ cân tại A

$$\Rightarrow AM = AD.$$

- b) Khi $\widehat{ADC} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Mặt khác $\triangle ADM$ cân có



$$\widehat{ADC} = 60^0 \text{ nên } \triangle ADM \text{ đều} \Rightarrow \widehat{DAM} = 60^0$$

Do đó $\widehat{MAB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MOB} = 120^0$ (góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung)

$$\text{Vậy } l_{\widehat{MB}} = \frac{\pi R \cdot 120}{180} = \frac{2\pi R}{3}$$

c) Xét $\triangle AIN$ và $\triangle BIC$ có $\widehat{AIN} = \widehat{BIC}$ (đối đỉnh)

$$\widehat{NAI} = \widehat{NBC} \text{ (góc nội tiếp chắn cung NC)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AIN \sim \triangle BIC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IN}{IC} \Rightarrow IA \cdot IC = IN \cdot IB$$

$$\text{(mà } IC = IA) \Rightarrow IA^2 = IN \cdot IB.$$

d) Gọi IA' là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AND$, ta dễ dàng chứng minh được $IA'^2 = IN \cdot IB$ mà $IA^2 = IN \cdot IB$ (cmt)

$$\Rightarrow IA'^2 = IA^2 \Rightarrow IA' = IA \text{ hay } A' \text{ trùng với } A.$$

Vậy IA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AND$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Trên cung nhỏ BC lấy điểm M bất kì. Trên tia đối của tia MA lấy E sao cho $MB = ME$.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính số đo góc CMB .

c) Chứng minh: $CM \perp BE$.

$$\text{Hướng dẫn: b) } \widehat{CMB} = \widehat{CMA} + \widehat{AMB} = 45^0 + 90^0 = 135^0$$

$$\text{c) } \triangle EMB \text{ vuông cân} \Rightarrow \widehat{MEB} = 45^0$$

Gọi H là giao điểm của CM và BE , ta có $\widehat{HME} = \widehat{CMA} = 45^0$ (đối đỉnh).

$$\text{Trong } \triangle MHE \text{ có } \widehat{MEB} + \widehat{HME} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MHE} = 90^0.$$

2. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . C là điểm bất kì trên (O) (C khác A và B). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D . Gọi M là trung điểm của AD .

a) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) .

b) OM cắt AC tại I , chứng tỏ khi C di chuyển, I thuộc về đường tròn cố định tiếp xúc trong với (O) .

c) Biết $BC = R$. Tính diện tích phần giới hạn bởi cung nhỏ AC và các đoạn AD, CD .

Hướng dẫn :

a) $\triangle ACD$ có MC là đường trung tuyến nên $MC = MA$.

Vậy $\triangle MCO = \triangle MAO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$.

b) Có OM là đường trung trực của $AC \Rightarrow OM \perp AC$.

Do đó $\widehat{AIO} = 90^\circ$. Vậy I thuộc đường tròn đường kính AO .

c) Gọi diện tích hình cần tính là S .

S_q là diện tích hình quạt chắn cung AC , ta có :

$$S = S_{ABD} - S_q - S_{BOC} = 2R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(21\sqrt{3} - 4\pi)}{12}.$$

3. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC của hai đường tròn ($B \in (O), C \in (O')$). Tiếp tuyến tại A của hai đường tròn cắt BC tại M .

a) Chứng minh M là trung điểm của BC .

b) Chứng minh : $\widehat{BAC} = \widehat{MO'}$.

c) Tia CA cắt (O) tại D . Chứng minh : $DA \cdot DC = 4R^2$.

d) Tia BA cắt (O') tại E . Chứng minh : $S_{ABC} = S_{ADE}$.

Hướng dẫn :

c) $DA \cdot DC = DB^2$

d) Tương tự ta có CE cũng là đường kính của (O') nên $CE \parallel BD$ (cùng vuông góc với BC do tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_2$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD \cdot AE = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABC}.$$

4. Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Kẻ đường cao BD và CE của tam giác, hai đường này cắt nhau tại H . Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại M, N và cắt BC tại K .

a) Chứng minh : $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

b) Chứng minh : $AM = AN$.

c) Chứng minh : $KE \cdot KD = KB \cdot KC$.

d) Cho $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính diện tích tứ giác $ADOE$ theo R .

Hướng dẫn :

a) Kẻ tiếp tuyến Ax có $\widehat{AED} = \widehat{ACB} (= \widehat{xAB})$.

c) Xét $\triangle KBE \sim \triangle KCD$ (g.c.g).

d) Ta chứng minh $ED \perp OA$, tính được $ED = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$S_{AEOD} = \frac{1}{2}OA \cdot ED = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

5. Theo cùng chiều trên đường tròn (O; R) lấy các điểm A, B, C theo thứ tự sao cho dây cung $AB = R\sqrt{2}$, cung BC có số đo 30° .

a) Tính số đo của cung AB và độ dài cung AC.

b) Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với BC tại D. Tính độ dài AD, BD và BC theo R.

c) M là điểm di động trên cung lớn AC. Chứng tỏ tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC di động trên đường tròn cố định có giới hạn.

Hướng dẫn :

c) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle MAC$ thì I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác.

$$\text{Ta có } \widehat{AOC} = 120^\circ \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{MCA} = 180^\circ - \widehat{AMC} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2}\widehat{MAC} + \frac{1}{2}\widehat{MCA} = 60^\circ$$

$$\text{hay } \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 120^\circ$$

Hai điểm A, C cố định, $\widehat{AIC} = 120^\circ$ không đổi. Do đó I thuộc cung chứa góc 120° dựng trên đoạn AC.

Giới hạn : Vì M chỉ di động trên cung lớn AC nên I chỉ di động trên cung AOC (trừ hai điểm A, C).

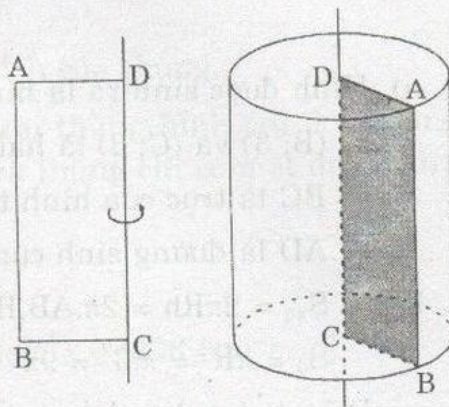
§1. Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích hình trụ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

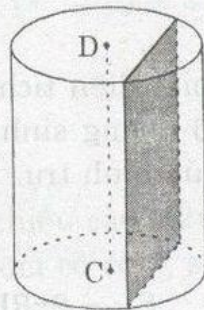
1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định ta được một hình trụ.

- DA và CB quét nên hai đáy hình trụ là hai hình tròn bằng nhau có tâm D và C nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ mỗi vị trí AB được gọi là một đường sinh.
- Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.
- DC là trục.



2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng



- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy thì mặt cắt là một hình tròn bằng hình tròn đáy.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục DC thì mặt cắt là một hình chữ nhật.

3. Công thức tính diện tích và thể tích

- Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2\pi rh$
(r : bán kính đáy, h : chiều cao)
- Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2$
- Thể tích : $V = S.h = \pi r^2.h$
(S là diện tích đáy, h là chiều cao)

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$ quay một vòng quanh BC.

- Xác định tên gọi, hình được sinh ra và các yếu tố.
- Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình ấy.

Giải

- a) Hình được sinh ra là hình trụ.

- $(B; 3)$ và $(C; 3)$ là hai đường tròn đáy.
- BC là trục của hình trụ.
- AD là đường sinh cũng là đường cao $AD = BC$.

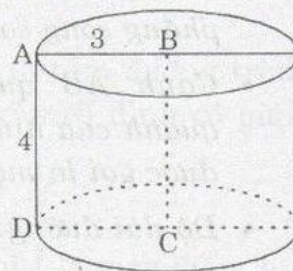
b) $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot AB \cdot BC = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$S_d = \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

Diện tích toàn phần :

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 24\pi + 2 \cdot 9\pi = 42\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích : } V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



ĐỀ SỐ 2

Cho biết diện tích xung quanh của hình trụ là $160\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ và hình trụ có đường sinh là $h = 10\text{cm}$. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

Giải

$$\text{Ta có : } S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow R = \frac{S_{xq}}{2\pi h} = \frac{160\pi}{2\pi \cdot 10} = 8 \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích đáy : } S_d = \pi R^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích toàn phần : } S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 160\pi + 2 \cdot 64\pi = 288\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích : } V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 10 = 640\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ĐỀ SỐ 3

Một hình trụ có bán kính đáy là R và một mặt phẳng qua trục OO' bị giới hạn bởi hình trụ là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

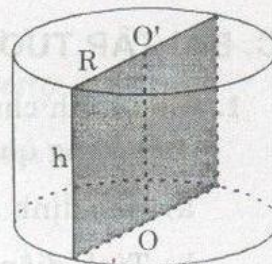
Giải

Mặt phẳng qua OO' bị giới hạn bởi hình trụ là hình vuông nên

đường sinh là đường cao và bằng $2R$.

Vậy : $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot R \cdot 2R = 4\pi R^2$ (đvdt)

$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ (đvtt).



ĐỀ SỐ 4

Người ta muốn làm một chiếc thùng hình trụ bằng tôn có đường kính đáy là 28cm và chiều cao là 50cm.

- Tính diện tích xung quanh và thể tích của thùng.
- Tính diện tích miếng tôn cho đủ làm thùng hình trụ đó (không kể chỗ nối nhau giữa hai mép tôn và thùng chỉ có một đáy dưới).

Giải

- Diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 14 \cdot 50 = \pi \cdot 1400 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 4396 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Thể tích thùng :

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 14^2 \cdot 50 = 9800\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 30772 \text{ (cm}^3\text{)}$$

- Gọi S là diện tích tôn đủ để làm thùng.

$$S = S_{xq} + S_d. \text{ Trong đó : } S_d = \pi R^2 = \pi \cdot 14^2 = 196\pi \approx 615 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow S \approx 4396 + 615 \approx 5011 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

ĐỀ SỐ 5

Để bơm nước vào một thùng hình trụ có chiều cao 1,2m và đường kính đáy là 1m. Người ta dùng một máy bơm có công suất 1320 lít trong 1 giờ. Hỏi sau khi bơm được $\frac{2}{3}$ giờ người ta tắt máy bơm thì lúc này nước đã tràn ra ngoài chưa ?

Giải

Bán kính đáy của thùng là $1 : 2 = 0,5$ (m)

Thể tích của thùng hình trụ là :

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 1,2 \approx 0,942 \text{ (m}^3\text{)} \approx 942 \text{ (l)}$$

$$\text{Sau } \frac{2}{3} \text{ giờ số lít nước được bơm vào thùng là : } \frac{2}{3} \cdot 1320 = 880 \text{ (l)}$$

Vì $880l < 942l$ nên nước chưa bị tràn ra ngoài.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 4cm, đường chéo BD = 5cm quay một vòng quanh cạnh AB.

a) Xác định tên gọi hình được sinh ra và các yếu tố.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích.

Hướng dẫn : Hình được sinh ra là hình trụ, hai đáy là hai đường tròn tâm A và B có bán kính 3 (cm). Trục là AB, đường sinh CD, chiều cao = CD.

$$S_{xq} = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}; \quad V = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. Diện tích xung quanh của một hình trụ bằng $24\pi \text{ cm}^2$. Diện tích toàn phần bằng $42\pi \text{ cm}^2$. Tính bán kính của đường tròn đáy và chiều cao của hình trụ.

Hướng dẫn : Ta có : $2S_d = S_{tp} - S_{xq}$

$$\text{hay } 2\pi r^2 = 42\pi - 24\pi = 18\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Khi đó } h = \frac{S_{xq}}{2\pi r} = \frac{24\pi}{2\pi \cdot 3} = 4 \text{ (cm)}. \text{ Vậy chiều cao là 4 (cm).}$$

3. Cho hình trụ có thể tích là 240cm^3 , người ta cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với mặt đáy, ta được hai hình trụ có chiều cao là h và h' sao cho $h = 3h'$. Tính thể tích của mỗi hình.

Hướng dẫn : Gọi V và V' theo thứ tự là hai hình trụ được tạo thành (sau khi cắt) và chiều cao tương ứng là h và h'.

$$\text{Ta có : } V = \pi R^2 h \quad \text{và} \quad V' = \pi R^2 h'$$

$$\text{Do đó } \frac{V}{V'} = \frac{h}{h'} = 3 \Rightarrow V = 3V'$$

$$\text{Ta có : } V + V' = 240 \text{ hay } 3V' + V' = 240$$

$$\Rightarrow V' = 60 \text{ (cm}^3\text{)} \quad \text{và} \quad V = 180 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

4. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy và diện tích xung quanh của hình trụ là $50\pi \text{ cm}^2$. Tính bán kính đường tròn đáy và thể tích hình trụ.

Hướng dẫn : Vì $r = h$ nên $S_{xq} = 2\pi r^2$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{S_{xq}}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25 \Rightarrow r = h = 5 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = 125\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình nón

a) Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón.

- Cạnh OC quét nên đáy của hình nón là một hình tròn tâm O.
- Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón :

AC : đường sinh

A : đỉnh

AO : đường cao.

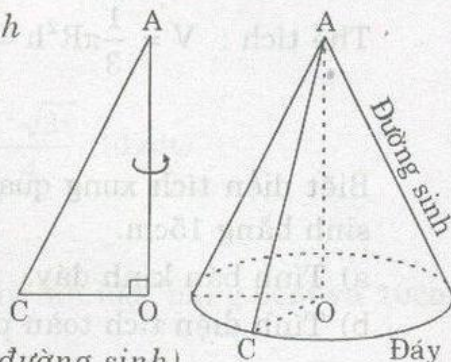
b) Diện tích và thể tích

- Diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = \pi r l \quad (r : \text{bán kính đáy}; l : \text{đường sinh})$$

- Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2$

- Thể tích : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$



2. Hình nón cụt

a) Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn.

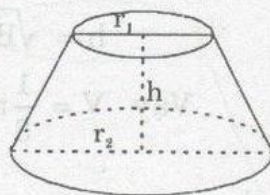
Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy được gọi là một hình nón cụt.

b) Diện tích xung quanh và thể tích

- Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2) \cdot l$

(r_1, r_2 : các bán kính đáy; l : đường sinh)

- Thể tích : $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$



B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền BC = 5 (đvdd), cạnh góc vuông AB = 4 (đvdd) quay một vòng quanh AB.

- Hình được sinh ra là hình gì ? Hãy chỉ rõ các phần tử đặc biệt của hình.
- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình.

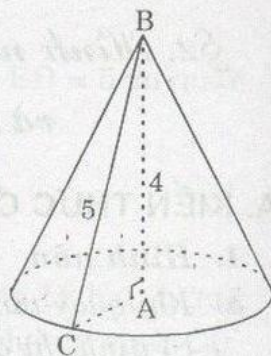
Giải

a) Hình được sinh ra là hình nón.

- Đáy là hình tròn tâm A, bán kính

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (đvdd)}$$

- Đỉnh B.
- Đường sinh BC.
- Đường cao AB.



b) Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot AC \cdot BC = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ (đvdt)}$

$$\text{Thể tích : } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (3)^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ (đvtt)}.$$

ĐỀ SỐ 2

Biết diện tích xung quanh của hình nón là $90\pi \text{ cm}^2$, độ dài đường sinh bằng 15cm.

a) Tính bán kính đáy.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Giải

a) Ta có : $S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow R = \frac{S_{xq}}{\pi l} = \frac{90\pi}{15\pi} = 6 \text{ (cm)}$

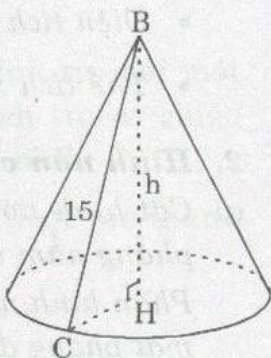
b) $S_d = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 90\pi + 36\pi = 126\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Gọi đường cao BH của hình nón là h.

$$h = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{15^2 - 6^2} \approx 13,7 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \approx \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 13,7 \approx 165\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 3

Cho hình nón có đỉnh S, đường kính đáy $2R$ và chiều cao $SH = R\sqrt{3}$.

a) Tính thể tích của hình.

b) Gọi $AB = R\sqrt{3}$ là một dây cung của đáy. Tính diện tích $\triangle SAB$.

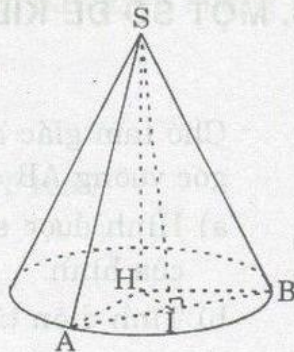
Giải

a) Theo bài ra chiều cao hình nón $SH = R\sqrt{3}$,
đường kính đáy là $2R \Rightarrow$ bán kính đáy là R .

Thể tích hình nón :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}.$$

b) Gọi I là trung điểm của dây AB, ta có :



$HI \perp AB$ (định lý đường kính dây cung) và $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Do đó } \triangle HIA \text{ vuông tại } I \Rightarrow HI = \sqrt{HA^2 - AI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}$$

Mặt khác $\triangle SHI$ vuông tại H

$$\Rightarrow SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{(R\sqrt{3})^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{3R^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{13R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{13}}{2}$$

$HI \perp AB$ (cmt) $\Rightarrow SI \perp AB$

Vậy diện tích của tam giác SAB là :

$$\frac{1}{2}AB.SI = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{R\sqrt{13}}{2} = \frac{R^2\sqrt{39}}{4} \text{ (đvdt)}.$$

ĐỀ SỐ 4

Cho hình nón cụt với hai bán kính đáy lần lượt bằng 6cm và 10cm, đường sinh bằng 16cm.

- Tính diện tích xung quanh.
- Tính đường cao và thể tích hình nón cụt.

Giải

- Diện tích xung quanh của hình nón cụt :

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l = \pi(10 + 6).16 \approx 804 \text{ (cm}^2\text{)}$$

- Cắt hình nón cụt bằng một mặt phẳng tâm hai đáy ta được phần giới hạn bởi hình nón cụt là một hình thang cân $ABCD$ (hình bên) với $AB = 12\text{cm}$; $CD = 20\text{cm}$; $BC = 16\text{cm}$.

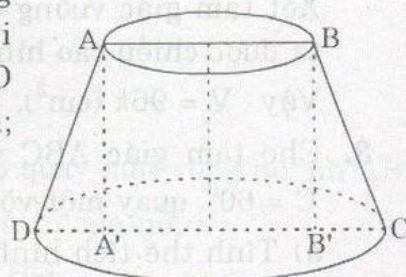
Vẽ $BB' \perp CD$; $AA' \perp CD$, ta có :

$$B'C = A'D = \frac{20 - 12}{2} = 4 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow BB' = \sqrt{BC^2 - B'C^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = 4\sqrt{15} \text{ (cm)}$$

Vậy thể tích hình nón cụt :

$$V = \frac{1}{3}\pi h.(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \frac{1}{3}\pi.4\sqrt{15}(10^2 + 6^2 + 10.6) \approx 3178 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 5

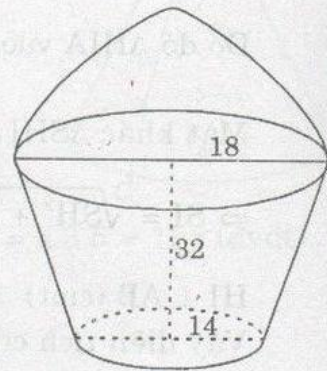
Một xô đựng nước có dạng hình nón cụt. Đáy xô có đường kính là 28cm. Miệng xô là đáy lớn của hình nón cụt có đường kính là 36cm. Hỏi xô có thể chứa được bao nhiêu lít nước nếu chiều cao của xô là 32cm ?

Giải

Bán kính hai đáy lần lượt là 14cm và 18cm, chiều cao $h = 32$ cm.

Vậy thể tích hình nón cụt :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 32(18^2 + 14^2 + 18 \cdot 14) \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 32 \cdot 772 \approx 25856 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 26 \text{ (l)} \end{aligned}$$



Vậy xô chứa được 26 lít nước.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho tam giác vuông cân có cạnh huyền $BA = a$ quay một vòng xung quanh cạnh góc vuông AC . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình được sinh ra.

Hướng dẫn : Ta có $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

2. Biết diện tích xung quanh của hình nón là $60\pi \text{ cm}^2$. Độ dài đường sinh là 10cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Hướng dẫn : $r = \frac{S_{xq}}{\pi l} = \frac{60\pi}{\pi \cdot 10} = 6 \text{ (cm)}$; $S_{tp} = 96\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Xét tam giác vuông cạnh huyền 10 (cm) và cạnh góc vuông 6 (cm), ta được chiều cao hình nón $h = 8 \text{ (cm)}$.

Vậy $V = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông $AC = 3$ cm và $\hat{C} = 60^\circ$ quay một vòng quanh AB .

a) Tính thể tích hình nón tạo thành.

b) Cắt hình nón trên bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm AB . Tính thể tích hình nón cụt sinh ra.

Hướng dẫn :

a) Tính $AB = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$; $V = 9\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

b) Gọi I là trung điểm của AB và K là giao điểm của mặt phẳng (P) (mặt phẳng qua I và song song với đáy hình chóp) với BC có

$IK \parallel AC$ và $IK = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$ và $KC = 3 \text{ (cm)}$, ta được :

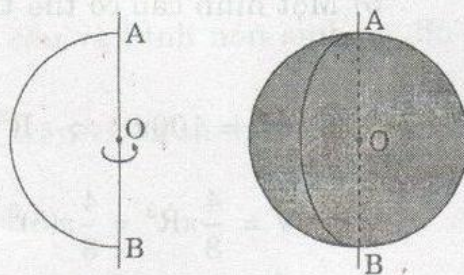
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \frac{63\sqrt{3}\pi}{8} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

§3. Hình cầu. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

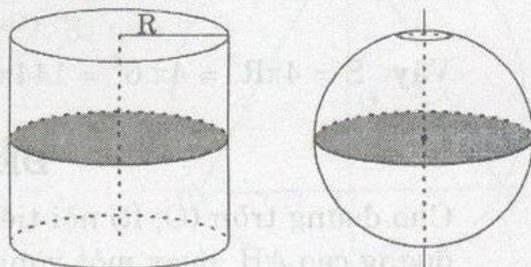
1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.



2. Cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần mặt phẳng nằm trong hình đó (mặt cắt) là một hình tròn.



3. Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{hay} \quad S = \pi d^2$$

(R : bán kính; d : đường kính)

4. Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

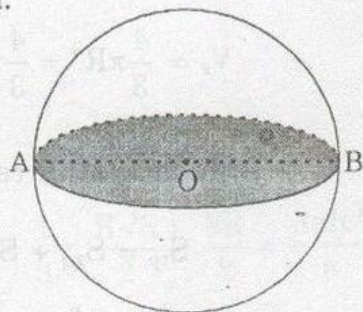
Cho một nửa hình tròn có đường kính AB quay một vòng quanh AB .

a) Gọi tên hình được sinh ra và các phần tử của nó.

b) Cho $AB = 8\text{cm}$. Tính diện tích và thể tích.

Giải

a) Khi quay nửa hình tròn tâm O đường kính AB một vòng quanh AB ta được hình cầu. Tâm O là trung điểm của đoạn AB và bán kính bằng $\frac{AB}{2}$.



b) $R = \frac{AB}{2} = 4(\text{cm}) \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi(4)^2 = 64\pi (\text{cm}^2)$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{256\pi}{3} (\text{cm}^3).$$

ĐỀ SỐ 2

- a) Một hình cầu có diện tích mặt cầu là $100\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích.
b) Một hình cầu có thể tích là $288\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. Tính diện tích mặt cầu.

Giải

$$\text{a) } S = 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = \frac{100\pi}{4\pi} = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{b) } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = \frac{288\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 216 \Rightarrow R = 6 \text{ (dm)}$$

$$\text{Vậy } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$

ĐỀ SỐ 3

Cho đường tròn (O; R) nội tiếp trong một tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH, quay một vòng quanh AH. Tính diện tích toàn phần, thể tích hình cầu, hình nón sinh ra.

Giải

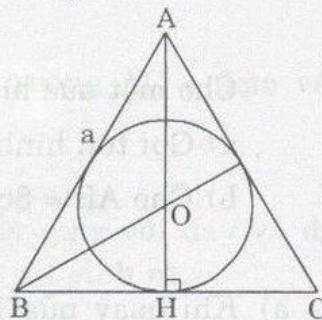
Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao AH đồng thời cũng là đường trung tuyến. Gọi O là trọng tâm, ta có :

$$OH = \frac{1}{3}AH \text{ và } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

OH là bán kính hình cầu tạo thành nên :

$$S_c = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot OH^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{3}$$

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54} \text{ (đvtt)}$$



Hình chóp sinh ra có bán kính đáy là $HB = \frac{a}{2}$.

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot HB \cdot AB + \pi \cdot HB^2$$

$$= \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a + \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot HB^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24} \text{ (đvtt)}.$$

ĐỀ SỐ 4

Cho tam giác đều nội tiếp (O; R). Gọi D là điểm đối xứng của A qua tâm O, quay một vòng quanh AD.

- a) Tính diện tích toàn phần của hình cầu và hình nón sinh ra. So sánh hai diện tích này.
- b) Tính thể tích hình cầu và hình nón trên và so sánh hai thể tích.

Giải

a) $S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2$.

Diện tích toàn phần của hình nón :

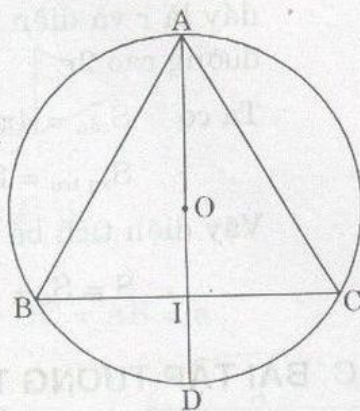
$$S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2$$

Tam giác ABC đều nội tiếp trong (O; R) nên

$$AB = AC = BC = R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow IB = IC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

và đường cao $AI = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$



Vậy hình nón có đường cao $AI = \frac{3R}{2}$, bán kính đáy $IB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và

đường sinh $AB = R\sqrt{3}$.

$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \pi \cdot IB \cdot AB = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3\pi R^2}{2}$$

$$S_d = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$$

Vậy $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_d = \frac{3\pi R^2}{2} + \frac{3\pi R^2}{4} = \frac{9\pi R^2}{4}$

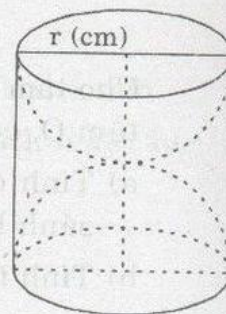
Do đó : $\frac{S_{\text{cầu}}}{S_{\text{xq}}} = \frac{4\pi R^2}{\frac{9\pi R^2}{4}} = \frac{16}{9}$.

b) $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot IB^2 \cdot AI = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3\pi R^3}{8}$

Vậy $\frac{V_c}{V_n} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{3\pi R^3}{8}} = \frac{32}{9}$.

ĐỀ SỐ 5

Một khối gỗ dạng hình trụ đứng bán kính đường tròn đáy là r (cm), chiều cao $2r$ (cm), người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu (hình bên). Tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).



Giải

Diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại là hai nửa mặt cầu có bán kính đáy là r và diện tích xung quanh của mặt trụ có cùng bán kính r và đường cao $2r$.

Ta có : $S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2$ (là diện tích hai nửa mặt cầu)

$$S_{\text{xq trụ}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Vậy diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại là :

$$S = S_c + S_{\text{xq trụ}} = 4\pi r^2 + 4\pi r^2 = 8\pi r^2.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. a) Cho hình cầu có đường kính là $2R$. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu theo R .
b) Một hình trụ cũng có đường kính đáy là $2R$, có cùng thể tích với hình cầu trên. Hãy tính chiều cao của hình trụ.

Hướng dẫn : Diện tích mặt cầu : $S_c = 4\pi R^2$

$$\text{Thể tích hình cầu : } V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Thể tích hình trụ : } V_t = \pi R^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{V_t}{\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2} \quad (\text{vì } V_c = V_t) \quad \text{hay} \quad h = \frac{4}{3}R.$$

2. Hai hình cầu có các bán kính tương ứng là R và $3R$. Tìm tỉ số các thể tích của chúng.

Hướng dẫn : Gọi V_1, V_2 là thể tích của hai hình cầu đã cho, ta có :

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi (3R)^3 = 36\pi R^3$$

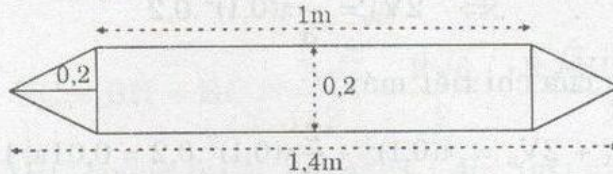
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{36\pi R^3} = \frac{1}{27}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình tạo ra khi quay tam giác ABC một vòng quanh AD.
2. Chi tiết máy có dạng như hình vẽ.



Tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết đó.

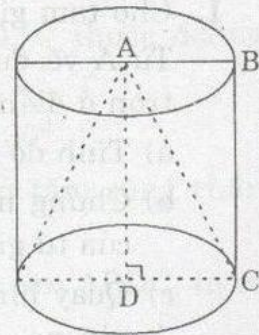
Giải

1. $\triangle ADC$ vuông tại D, có : $AD = BC = 2a$ và $DC = AB = a$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

Diện tích toàn phần của hình được tạo ra bằng tổng của diện tích hình tròn bán kính AB với diện tích xung quanh hình trụ có đường sinh BC và diện tích xung quanh hình nón có đường sinh AC.

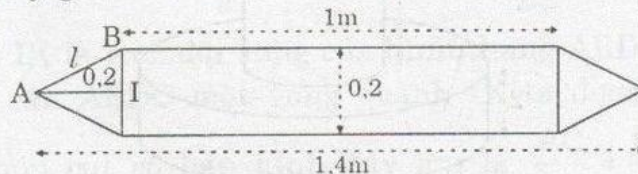
$$\begin{aligned} S_{tp} &= \pi AB^2 + 2\pi AB \cdot BC + \pi DC \cdot AC \\ &= \pi a^2 + 4\pi a^2 + \pi a \cdot a\sqrt{5} = \pi a^2(5 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$



Vì $\triangle ABC = \triangle ACD$ nên hình tạo bởi $\triangle ABC$ khi quay xung quanh AD có cùng thể tích với hình tạo bởi $\triangle ADC$ khi quay xung quanh AD. Đó là một hình nón và có thể tích :

$$V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot 2a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

2. Chi tiết máy gồm hai hình :



Hình trụ có chiều cao 1m và bán kính đáy là $0,2m : 2 = 0,1m$. Hai hình nón bằng nhau có bán kính đáy là 0,1m và có chiều cao là 0,2m, đường sinh $AB = l$.

$$\text{Ta có : } l = AB = \sqrt{AI^2 + IB^2} = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = \sqrt{0,05} \text{ (m)}$$

Gọi diện tích xung quanh của hình nón : $S_n = \pi Rl = \pi \cdot 0,1 \cdot \sqrt{0,05}$

và diện tích xung quanh của hình trụ : $S_t = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 0,1 \cdot 1$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích bề mặt : } S &= S_t + 2S_n = 2\pi \cdot 0,1 + 2\pi \cdot 0,1 \sqrt{0,05} \\ &= 0,2\pi(1 + \sqrt{0,05}) \text{ (m}^2\text{)} \approx 0,768 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Gọi thể tích hình trụ : $V_t = \pi R^2 h = \pi(0,1)^2 \cdot 1$

và thể tích hình nón : $V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(0,1)^2 \cdot 0,2$

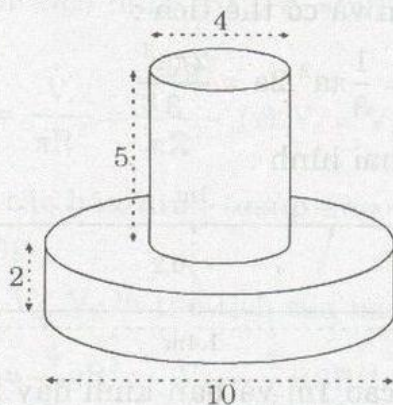
$$\Rightarrow 2V_n = \frac{2}{3}\pi(0,1)^2 \cdot 0,2$$

Vậy thể tích của chi tiết máy :

$$\begin{aligned} V &= V_t + 2V_n = \pi(0,1)^2 + \frac{2}{3}\pi(0,1)^2 \cdot 0,2 = 0,01\pi \left(1 + \frac{0,4}{3}\right) \\ &\approx 0,036 \text{ (m}^3\text{)}. \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 2

- Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O; R). Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt BC ở H và cắt đường tròn ở điểm thứ hai D.
 a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC theo R.
 b) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang cân và tính diện tích của tứ giác ấy theo R.
 c) Quay hình thang cân ABDC một vòng xung quanh trục đối xứng của nó, hình được sinh ra là hình gì ? Tính thể tích của hình được sinh ra.
- Chi tiết máy có dạng như hình vẽ.



Tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết đó.

Giải

- a) $\hat{C} = 45^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$. Do đó $AB = R\sqrt{2}$

$$\widehat{B} = 60^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow AC = R\sqrt{3}$$

$\triangle AHB$ vuông có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $AB = R\sqrt{2}$

$$\Rightarrow HB = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Đặt $HC = x$, ta có :

$$HC^2 + HA^2 = AC^2$$

$$\text{hay } x^2 + x^2 = (R\sqrt{3})^2$$

$$2x^2 = 3R^2 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Do đó } BC = BH + HC = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R\sqrt{6}}{2} = \frac{R\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2}$$

- b) Ta có $\triangle AHC$ vuông tại H, có $\widehat{ACH} = 45^\circ$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHC$ vuông cân
 Mặt khác $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = 45^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CD}$)
 $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CBD} = 45^\circ$.

Do đó $AC \parallel BD$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

Vậy $ABDC$ là hình thang có bốn đỉnh A, B, D, C thuộc đường tròn nên $ABDC$ là hình thang cân.

Ta có $\triangle AHB$ vuông tại H, có $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{BOD} = 60^\circ$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung) $\Rightarrow \triangle BOD$ đều.

$BD = R$. Gọi IK là trục đối xứng của hình thang cân $ABDC$, ta có

$$OI = \frac{R\sqrt{3}}{2}, OK = \frac{R}{2} \text{ (vì } \triangle AOC \text{ cân có } \widehat{AOC} = 120^\circ)$$

$$\text{Do đó } IK = IO + OK = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

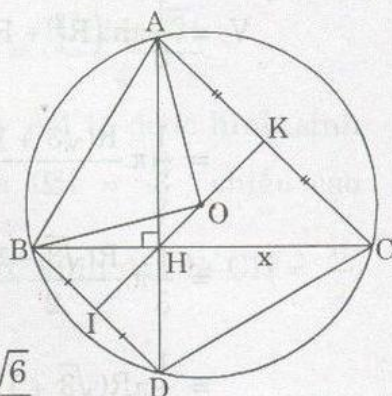
$$\text{Vậy } S_{ABDC} = \frac{(AC + BD) \cdot IK}{2} = \frac{(R\sqrt{3} + R) \cdot \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2}}{2} = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{2}$$

- c) Đường IK là trục đối xứng của hình thang $ABDC$. Khi quay hình thang cân $ABDC$ một vòng quanh IK ta được hình sinh ra là

hình nón cụt có bán kính đáy lớn là $\frac{AC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, đáy nhỏ là

$$\frac{BD}{2} = \frac{R}{2} \text{ và đường cao } IK = \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

Vậy thể tích của hình là :



$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3}\pi h.(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) = \frac{1}{3}\pi.IK.\left[\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \frac{AC}{2}.\frac{BD}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{3}\pi.\frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}.\left[\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{R\sqrt{3}}{2}.\frac{R}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{3}\pi.\frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}.\left[\frac{3R^2 + R^2 + R^2\sqrt{3}}{4}\right] \\
 &= \frac{1}{6}\pi R(\sqrt{3}+1).\frac{R^2(4+\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{24}\pi R^3(\sqrt{3}+1)(4+\sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

2. Chi tiết máy gồm hai hình trụ :

- Hình trụ thứ nhất có chiều cao là 2 (đvdd), bán kính đáy là $10 : 2 = 5$ (đvdd).
- Hình trụ thứ hai có chiều cao là 5 (đvdd), bán kính đáy là $4 : 2 = 2$ (đvdd).

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích bề mặt của hình trụ thứ nhất và hình trụ thứ hai, ta có :

$$S_1 = 2\pi R_1 h_1 + 2\pi R_1^2 = 2\pi.5.2 + 2\pi.5^2 = 70\pi \text{ (đvdt)}$$

$$S_2 = 2\pi R_2 h_2 + 2\pi R_2^2 = 2\pi.2.5 + 2\pi.2^2 = 28\pi \text{ (đvdt)}$$

Vậy diện tích bề mặt của chi tiết máy $S_1 + S_2 - \pi R_2^2 = 94\pi$ (đvdt)

Tương tự, gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ thứ nhất và hình trụ thứ hai, ta có :

$$V_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi.5^2.2 = 50\pi \text{ (đvtt)}$$

$$V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi.2^2.5 = 20\pi \text{ (đvtt)}$$

Vậy thể tích của chi tiết máy là $V_1 + V_2 = 50\pi + 20\pi = 70\pi$ (đvtt).

ĐỀ SỐ 3

Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây CD sao cho $CD \parallel AB$ và $CD = R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích hình thang ABDC.

b) Tính thể tích của hình được sinh ra khi quay hình thang ABDC quanh AB.

Giải

a) Ta có : $CD = R\sqrt{3}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$

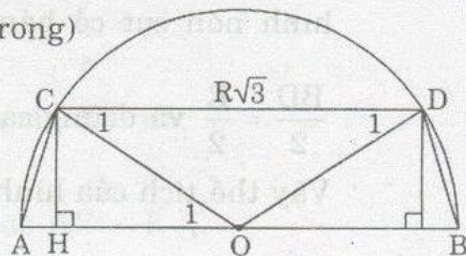
$\triangle COD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = 30^\circ$

$CD \parallel AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{C}_1 = 30^\circ$ (so le trong)

Kẻ $CH \perp AB$ ta có $\triangle CHO$ vuông,

có $\widehat{O}_1 = 30^\circ$

nên $CH = CO.\sin 30^\circ = \frac{R}{2}$



$$\text{Vậy } S_{ABDC} = \frac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \frac{(2R + R\sqrt{3}) \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{4}.$$

- b) Khi quay hình thang ABDC quanh cạnh đáy AB ta được hình sinh ra gồm một hình trụ có bán kính đáy là $CH = \frac{R}{2}$, chiều cao $CD = R\sqrt{3}$ và hai hình nón bằng nhau có bán kính đáy là $CH = \frac{R}{2}$ và chiều cao AH.

Trong tam giác vuông CHO, ta có :

$$HO = \sqrt{CO^2 - CH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = AO - HO = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(2 - \sqrt{3})}{2}$$

Vậy ta gọi V_n là thể tích hình nón.

$$V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot CH^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{R(2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\pi R^3(2 - \sqrt{3})}{24}$$

$$\text{Do đó hai hình nón bằng nhau có thể tích là : } 2V_n = \frac{\pi R^3(2 - \sqrt{3})}{12}$$

Và gọi V_t là thể tích hình trụ :

$$V_t = \pi R^2 h = \pi \cdot CH^2 \cdot CD = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{4}$$

Vậy thể tích của hình sinh ra là :

$$\begin{aligned} V &= V_t + 2V_n = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^3(2 - \sqrt{3})}{12} \\ &= \frac{3\pi R^3 \sqrt{3} + 2\pi R^3 - \pi R^3 \sqrt{3}}{12} = \frac{2\pi R^3 \sqrt{3} + 2\pi R^3}{12} = \frac{\pi R^3(\sqrt{3} + 1)}{6}. \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 4

Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến Ax và By tại C và D.

- a) Chứng minh rằng tích AC.BD không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) Cho $AC = \frac{R}{2}$.

- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác COD và AMB.

- Chứng minh rằng tứ giác ACDB là hình thang vuông. Khi cho hình thang ACDB quay quanh cạnh đáy AB. Hãy tính thể tích hình được sinh ra do diện tích giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AB và hình thang vuông ACDB.

Giải

a) Ta có CO là phân giác của $\widehat{AOM}$
(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự OD là phân giác của $\widehat{MOB}$

mà $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ$ nên $\triangle COD$ vuông tại O

có đường cao OM ta có

$$MC \cdot MD = MO^2 = R^2$$

mà $MC = AC$, $MD = BD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AC \cdot BD = R^2$ (1) không đổi.

b) • Dễ thấy tứ giác ACOM nội tiếp (vì $\widehat{CAO} + \widehat{CMO} = 180^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$)

Tương tự ta có tứ giác BDMO nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{MBO}$

$$\text{Do đó } \triangle COD \sim \triangle AMB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \frac{S_{COD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2$$

$$\text{Ta tính CD theo R: Từ (1) } \Rightarrow BD = \frac{R^2}{AC} = \frac{R^2}{\frac{R}{2}} = 2R$$

Do đó $DM = BD = 2R$.

$$\text{Ta có } CD = CM + DM = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}$$

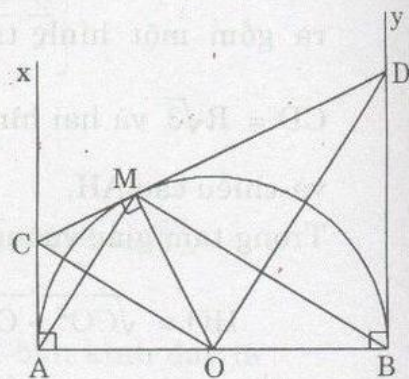
$$\text{Vậy } \frac{S_{COD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{5R/2}{2R}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

- Do Ax, By là hai tiếp tuyến của (O) nên $Ax \parallel By$ ($\perp AB$) nên ACDB là hình thang vuông.

Khi cho hình thang quay quanh cạnh đáy AB thì thể tích của hình được sinh ra do giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AB và hình thang ACDB là hiệu giữa thể tích hình nón cụt có đáy lớn $BD = 2R$, đáy nhỏ $AC = \frac{R}{2}$, chiều cao $AB = 2R$ và thể

tích hình cầu tâm O bán kính R.

Gọi V_n là thể tích của hình nón cụt.



$$V_n = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r + R.r).h = \frac{1}{3}\pi(BD^2 + AC^2 + BD.AC).AB$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[(2R)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2R \cdot \frac{R}{2}\right] \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R\left(4R^2 + \frac{R^2}{4} + R^2\right) = \frac{7\pi R^3}{2}$$

Gọi V_c là thể tích của hình cầu : $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$

và V là thể tích cần tìm : $V = V_n - V_c = \frac{7\pi R^3}{2} - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{13\pi R^3}{6}$.

ĐỀ SỐ 5

AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O ; R). Kẻ dây CE qua trung điểm I của bán kính OB , kẻ đường cao AH của $\triangle ACE$.

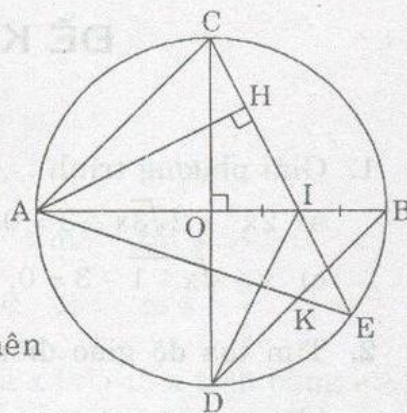
- Tính CE , AH và diện tích $\triangle ACE$ theo R .
- Chứng minh đường tròn qua ba điểm A , I , E tiếp xúc với đường thẳng AC .
- Gọi K là giao điểm của AE và BD .
Chứng minh : $AK.AE + BK.BD = 4R^2$.
- Tính thể tích của hình khối sinh ra do $\triangle CID$ quay quanh CD .

Giải

- a) $\triangle COI$ vuông tại O (gt), ta có :

$$CI = \sqrt{CO^2 + OI^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{OCI} = \frac{OC}{CI} = \frac{R}{\frac{R\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Lại có $\triangle CED$ vuông (CD là đường kính) nên

$$CE = CD \cdot \cos \widehat{OCI} = 2R \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$$

Xét hai tam giác vuông AHI và COI có $\widehat{HAI} = \widehat{OCI}$ (cùng phụ với $\widehat{OIC}$)

Do đó $\triangle AHI \sim \triangle COI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{CO} = \frac{AI}{CI}$

$$\Rightarrow AH = \frac{CO.AI}{CI} = \left(R \cdot \frac{3R}{2}\right) : \frac{R\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}R}{5}$$

Vậy $S_{ACE} = \frac{1}{2}AH.CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}R}{5} \cdot \frac{4R\sqrt{5}}{5} = \frac{6R^2}{5}$.

b) Ta có $AB \perp CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CBA}$

mà $\widehat{CBA} = \widehat{CEA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CEA}$ hay $\widehat{CAI} = \widehat{IEA}$

Do đó AC là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm A, I, E.

c) Xét $\triangle AIE$ và $\triangle AKB$ có $\widehat{IAE}$ chung và $\widehat{AEI} = \widehat{ABD}$ (vì $\widehat{AD} = \widehat{AC}$)

$$\text{nên } \triangle AIE \sim \triangle AKB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AK.AE = AI.AB \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \triangle BKA \sim \triangle BID \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BK}{BI} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow BK.BD = AB.BI \quad (2)$$

Cộng (1) và (2), ta có : $AK.AE + BK.BD = AB(AI + BI) = AB^2 = 4R^2$.

d) Khi tam giác CID quay quanh CD ta có thể tích hình sinh ra gồm hai hình nón bằng nhau và có chung đáy, bán kính $OI = \frac{R}{2}$ và chiều cao OC.

Gọi V_n là thể tích của hình nón, ta có :

$$V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 R = \frac{\pi R^3}{12} \Rightarrow 2V = \frac{\pi R^3}{6}$$

Vậy thể tích của hình khối sinh ra do $\triangle CID$ quay quanh CD là $\frac{\pi R^3}{6}$.

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình :

a) $2x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$

b) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

c) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$.

2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol ($\mathcal{P}$) : $y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng

(d) : $y = 3x + 4$.

3. Tìm m để phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ có nghiệm.

4. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $360m^2$. Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi của mảnh đất lúc ban đầu.

5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy D khác A và B. Trên đường kính AB lấy điểm C, kẻ $CH \perp AD$ ($H \in AD$). Đường phân giác trong của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F, đường thẳng DF cắt đường tròn tại N. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ANF} = \widehat{ACF}$.

b) Tứ giác AFCN là tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Ba điểm C, N, E thẳng hàng.

Giải

1. a) $\Delta' = (\sqrt{3})^2 - 2(-3) = 3 + 6 = 9; \quad \sqrt{\Delta'} = 3$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}; \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3}{2}.$$

b) Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Ta có phương trình : $9t^2 + 8t - 1 = 0$.

Vì $a - b + c = 9 - 8 - 1 = 0$, nên phương trình có hai nghiệm :

$$t_1 = -1 \text{ (loại)} \quad \text{và} \quad t_2 = \frac{1}{9}. \quad \text{Vậy } x = \pm \frac{1}{3}.$$

c) Đặt $t = \sqrt{x-1}$; $t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow x = t^2 + 1$

$$\text{Ta có phương trình : } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) :

$$-\frac{x^2}{2} = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

• $x = -2 \Rightarrow y = -2$

• $x = -4 \Rightarrow y = -8$

Tọa độ giao điểm : $(-2; -2), (-4; -8)$.

3. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}.$$

4. Gọi chiều rộng của mảnh đất lúc ban đầu là x ($x > 0$, x tính bằng m).

Chiều dài lúc đầu sẽ là $\frac{360}{x}$ (m).

Nếu tăng chiều rộng thêm 2m ta được : $x + 2$ (m); chiều dài giảm đi

6m, ta có : $\frac{360}{x} - 6$ (m)

Ta có phương trình : $(x + 2)\left(\frac{360}{x} - 6\right) = 360$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = -12 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Chiều rộng là 10 (m) và chiều dài 36 (m).

Ta có chu vi là $2(10 + 36) = 92$ (m).

Trả lời : Chu vi mảnh đất lúc đầu là 92 (m).

5. a) Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (AB là đường kính) hay $AD \perp BD$.

Lại có $CH \perp AD$ (gt) $\Rightarrow CH \parallel BD$. Do đó $\widehat{ACF} = \widehat{ABD}$ (đồng vị)

Mặt khác $\widehat{ABD} = \widehat{ANF}$

(góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$$\Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{ACF}.$$

- b) Ta có N và C nằm cùng phía đối với AF mà $\widehat{ANF} = \widehat{ACF}$ (cmt) nên bốn điểm A, F, C, N cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác AFCN nội tiếp.

- c) Ta có $\widehat{FNC} = \widehat{FAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FC)

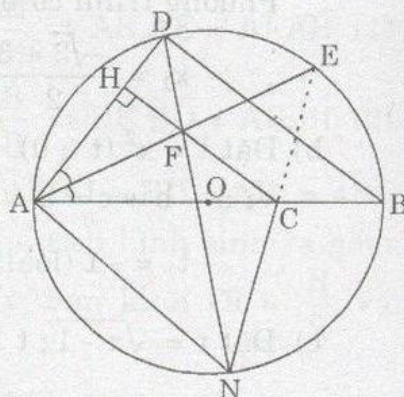
hay $\widehat{FNC} = \widehat{EAB}$

Lại có AE là phân giác của góc $\widehat{DAB}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ED} = \widehat{EB}$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{EAD}$$

Mặt khác $\widehat{EAD} = \widehat{DNE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Vậy $\widehat{FNC} = \widehat{DNE}$. Do đó hai tia NC và NE phải trùng nhau hay ba điểm C, N, E thẳng hàng.



ĐỀ SỐ 2

1. Giải phương trình :

a) $x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$

b) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1.$

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36. \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ
$$\begin{cases} mx + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

4. Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y = \frac{1}{2}x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A trên trục tung có tung độ là -2 và tiếp xúc với ($\mathcal{P}$).

5. Tìm m để tích hai nghiệm của phương trình :

$$4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

6. Từ điểm S ở ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB đến (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý thuộc cung nhỏ AB (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt SA, SB lần lượt tại C và D.

- a) Chứng minh rằng chu vi ΔSCD không đổi.
 b) AB cắt OC, OD theo thứ tự tại K và I. Chứng minh rằng OM, CI, DK đồng quy.
 c) Trường hợp $SO = 2R$. Chứng tỏ rằng diện tích tam giác COD bằng 4 lần diện tích tam giác OKI.

Giải

1. a) $\Delta = (2 - \sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \geq 0$

Phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}{2}$$

hay $x_1 = 2; \quad x_2 = -\sqrt{3}.$

- b) Đặt $t = \sqrt{x}; t > 0 \Rightarrow t^2 = x$. Ta có phương trình :

$$t - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy $x = 4$.

2. Theo định lí Vi-ét x, y là nghiệm phương trình :

$$X^2 - 13X + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ X = 9 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm : (4; 9), (9; 4).

3. Từ phương trình $x - y = 1 \Rightarrow y = x + 1$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được :

$$mx + x + 1 = 4 \Leftrightarrow (m + 1)x = 3 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

4. Tung độ gốc bằng -2 nên phương trình đường thẳng (d) có dạng : $y = ax - 2$.

Xét phương trình hoành độ điểm chung (nếu có) của (P) và (d) :

$$\frac{1}{2}x^2 = ax - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 4 = 0 \quad (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là : $y = \pm 2x - 2$.

5. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Khi đó, ta có: } x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{4} = \frac{\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{4} \geq -\frac{1}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1 x_2$ bằng $-\frac{1}{16}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

6. a) Ta có : $CM = CA$, $DM = DB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Gọi p là chu vi $\triangle SCD$, ta có :

$$p = SC + CM + MD + DS$$

$$\text{hay } = SC + CA + DB + DS$$

$$= SA + SB$$

$$= 2.SA \text{ (không đổi)}$$

b) Ta có $\widehat{SAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (góc giữa

tiếp tuyến một dây và góc ở tâm cùng chắn cung AB)

OC , OD lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$

$$\text{nên } \widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{COD} \text{ hay } \widehat{CAD} = \widehat{COI}.$$

Do đó tứ giác $ACIO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CIO} = \widehat{CAO} = 90^\circ$ hay $CI \perp OD$.

Chứng minh tương tự ta có $DK \perp OC$. Vậy OM , CI và DK là ba đường cao của $\triangle COD$ nên chúng đồng quy.

c) $SO = 2R$, $OA = R$ (gt) nên $\triangle$ vuông SAO là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ASB} = 60^\circ$$

Dễ thấy tứ giác $SAOB$ nội tiếp ($\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 60^\circ$$

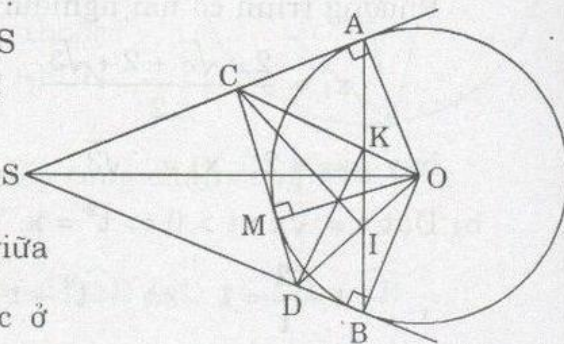
$$\triangle DKO \text{ vuông (cmt) có } \widehat{DOK} = 60^\circ \Rightarrow \frac{OK}{OD} = \frac{1}{2}.$$

Ta có tứ giác $CKID$ nội tiếp ($\widehat{CKD} = \widehat{CID} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{KIO} = \widehat{KCD} \text{ (cùng bù với } \widehat{KID})$$

$$\text{Do đó } \triangle OKI \sim \triangle ODC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{OKI}}{S_{ODC}} = \left(\frac{OK}{OD}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ODC} = 4S_{OKI}.$$



ĐỀ SỐ 3

1. Giải phương trình :

a) $\sqrt{12-x} = x$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} + 2 = 0.$

2. Giải hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ x + y = 16 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$$

3. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm khác dấu.

4. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-2)x - 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R) ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh tứ giác ACKB nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AA' của (O). Chứng minh rằng $AA' \perp EF$.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm H, I, A' thẳng hàng.

d) Gọi G là trọng tâm ΔABC . Chứng minh rằng : $S_{AHG} = 2S_{AOG}$.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \sqrt{12-x} = x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12-x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

b) Điều kiện : $x \neq 0; x \neq -1$. Đặt $t = \frac{x}{x+1}; t \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta có phương trình : } t + \frac{1}{t} + 2 = 0 &\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

2. a) Ta có : $\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5x = 3y \text{ (} y \neq 0 \text{)}$

$$\text{Hệ trở thành : } \begin{cases} 5x - 3y = 0 & (1) \\ x + y = 16 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow y = 16 - x. \text{ Thế vào (1): } 5x - 48 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Hệ có nghiệm : (6; 10).

$$\text{b) Ta có : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ Theo định lí Vi-ét } x, y \text{ là nghiệm của phương trình :}$$

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$$

Hệ có hai nghiệm : (1; 2), (2; 1).

$$\bullet \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ Tương tự, ta có nghiệm của hệ : } (-1; -2), (-2; -1).$$

3. Phương trình có 2 nghiệm khác dấu khi :

$$a.c < 0 \Leftrightarrow -2m - 5 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ Phương trình có nghiệm} &\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 - (2m - 5) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (m - 3)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } m) \end{aligned}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Theo định lí Vi-ét, ta có

$$x_1 + x_2 = 2(m - 2); \quad x_1 x_2 = -2m - 5$$

$$\text{Vậy : } x_1^2 + x_2^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 18$$

$$\Leftrightarrow [2(m - 2)]^2 - 2(-2m - 5) = 18$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$$

5. a) Ta có K đối xứng với H qua BC nên $KB = HB$ và $KC = HC$.

$$\text{Do đó } \triangle BKC = \triangle BHC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BHC} \quad (1)$$

$$\text{mà } \widehat{BHC} = \widehat{FHE} \text{ (đối đỉnh)} \quad (2)$$

Mặt khác ta có tứ giác AEHF nội tiếp ($\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{FHE} = 180^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BKC} = 180^\circ$$

Do đó tứ giác ACKB nội tiếp.

b) Ta có tứ giác BFEC nội tiếp ($\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB} \text{ (cùng bù với } \widehat{BFE}) \quad (4)$$

169

5. Cho đường tròn $(O; R)$, M là điểm nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD đến đường tròn (C, D là các tiếp điểm) và cát tuyến MAB .

a) Chứng minh : $MC^2 = MA.MB$.

b) Gọi K là trung điểm của AB , chứng minh năm điểm M, C, K, O, D cùng thuộc một đường tròn.

c) Cho $AB = R\sqrt{3}$. Tính MA theo R .

d) Gọi H là giao điểm của OM và CD . Chứng minh rằng tứ giác $ABOH$ nội tiếp.

Giải

$$1. a) \sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$b) \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ 15(x-2) - 15x + 2x(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3. \end{cases}$$

2. Áp dụng định lí Vi-ét x, y là nghiệm phương trình bậc hai :

$$X^2 + X - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -3 \\ X = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm : $(-3; 2), (2; -3)$.

3. Ta có : $x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$

Thế y vào phương trình thứ nhất, ta được :

$$mx + x - 3 = 2 \Leftrightarrow (m + 1)x = 5 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

4. • Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

• Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [2(m-1)]^2 - 2(m^2 - m)$

$$= 2m^2 - 6m + 4 = 2(m^2 - 3m) + 4 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$MC^2 = MO.MH \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\text{Lại có } MC^2 = MA.MB \text{ (cmt)} \Rightarrow MO.MH = MA.MB$$

$$\text{Do đó } \triangle MHA \sim \triangle MBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$$

$$\text{mà } \widehat{MHA} + \widehat{AHO} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBO} + \widehat{AHO} = 180^\circ \text{ chứng tỏ tứ giác ABOH nội tiếp.}$$

ĐỀ SỐ 5

1. Giải phương trình :

$$a) \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$$

$$b) 2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$$

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 10. \end{cases}$$

3. Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y = 2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua điểm $A(0; -2)$ và tiếp xúc với ($\mathcal{P}$).

4. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn trong 3 giờ 45 phút thì đầy bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể, biết rằng vòi thứ nhất chảy chậm hơn vòi thứ hai nên thời gian để đầy bể của vòi thứ nhất hơn vòi thứ hai 4 giờ.

5. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài tại C , CA là đường kính của (O), CB là đường kính của (O') sao cho $CA > CB$. Qua trung điểm M của AB , vẽ $DE \perp AB$. Đường thẳng DC cắt (O') tại F .

a) Chứng minh tứ giác $AEBD$ là hình thoi.

b) Chứng minh B, F, E thẳng hàng.

c) Đường thẳng BD cắt (O') tại G . Xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MGF$.

d) Chứng minh MF là tiếp tuyến của (O').

Giải

1. a) Đặt $u = \sqrt{x+5}$; $v = \sqrt{5-x}$; điều kiện $-5 \leq x \leq 5$; $u \geq 0$ và $v \geq 0$

$$\Rightarrow u^2 = x+5; v^2 = 5-x \Rightarrow u^2 + v^2 = 10$$

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ (u+v)^2 - 2uv = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3. \end{cases}$$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có u, v là nghiệm phương trình bậc hai :

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=3 \end{cases}$$

Ta tìm được $x = \pm 4$.

b) Điều kiện : $x > 1$. Khi đó, các biến đổi sau là tương đương :

$$2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 2(x-1) - 5\sqrt{x-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} = 2x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 25(x-1) = (2x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 4x^2 - 45x + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 10$$

2. Ta có : $x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$. Thế y vào phương trình thứ hai :

$$x(x-3) = 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta được nghiệm của hệ là : $(5; 2), (-2; -5)$.

3. Vì điểm $A(0; -2)$ thuộc Oy nên tung độ gốc của đường thẳng (d) : $y = ax + b$ có $b = -2$. Ta có : $y = ax - 2$

$(\mathcal{P})$ và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $2x^2 = ax - 2$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow 2x^2 - ax + 2 = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 4.$$

4. Ta có : 3 giờ 45 phút = $\frac{15}{4}$ giờ.

Gọi x là thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể ($x > 0$, x tính bằng giờ), thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể sẽ là $x - 4$ ($x > 4$).

Một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được

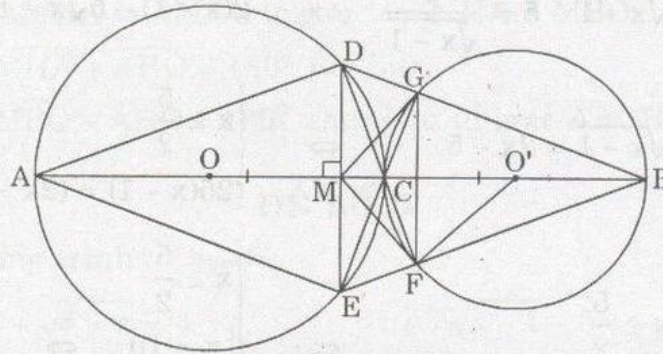
$$\frac{1}{x-4} \text{ (bể).}$$

Ta có phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow 2x^2 - 23x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời : Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 6 giờ.

5. a) $DE \perp AB \Rightarrow M$ là trung điểm của DE (định lý đường kính dây cung) lại có M là trung điểm AB (gt) nên $AEBD$ là hình thoi.



- b) Ta có $\widehat{CFB} = 90^\circ$ (CB là đường kính)
 $\Rightarrow CF \perp BF$ hay $DF \perp BF$ (1)

Lại có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (AC là đường kính) hay $AD \perp DF$
 mà $AD \parallel EB$ (cmt) $\Rightarrow BE \perp DF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BF$ và BE phải trùng nhau. Vậy ba điểm B, F, E thẳng hàng.

- c) Ta có tứ giác $DMCG$ nội tiếp (vì $\widehat{DMC} + \widehat{DGC} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MGC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC)}$$

$$\text{Mà } \widehat{MDC} = \widehat{MBE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{DEB})$$

$$\text{mà } \widehat{MBE} = \widehat{CGF} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MGC} = \widehat{CGF} \text{ chứng tỏ GC là phân giác của } \triangle MGF.$$

Chứng minh tương tự ta có FC cũng là phân giác. Do đó C là giao điểm các đường phân giác hay C là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle MGF$.

- d) Ta có $\widehat{MDC} + \widehat{MCD} = 90^\circ$ (vì $\widehat{DMC} = 90^\circ$) (1)

$$\text{mà } \widehat{MCD} = \widehat{FCB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{FCB} = \widehat{CFO'} \text{ (vì } \triangle CO'F \text{ cân)} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CFO'} \text{ (2)}$$

Xét $\triangle DCE$ có đường cao CM đồng thời là trung tuyến nên $\triangle DCE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MDC}$

Mặt khác: Tứ giác $MCFE$ nội tiếp ($\widehat{EMC} = \widehat{EFC} = 90^\circ$)

$$\text{nên } \widehat{MEC} = \widehat{MFC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MFC} = \widehat{MDC} \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \widehat{MFC} + \widehat{CFO'} = 90^\circ \text{ hay } MF \perp O'F$$

Chứng tỏ MF là tiếp tuyến của (O') .