

Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}+16}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$

b) Chứng minh: $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2}$

c) Cho $P = A.B$. Tìm tất cả giá trị nguyên của x để $P \geq 1$

Bài II. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Hai người công nhân cùng làm việc và hoàn thành trong 6 giờ. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó một mình người thứ hai làm tiếp trong 3 giờ thì hai người làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ sẽ hoàn thành công việc?

Bài III. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{3}{\sqrt{y}-2} = -1 \\ \frac{2}{x+3} + \frac{4}{\sqrt{y}-2} = 3 \end{cases}$$

2. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) .

b) Tính diện tích tam giác OAB với A và B là các giao điểm của (d) với (P) .

(Biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn hoành độ của điểm B)

Bài IV. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) , lấy điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến AEF (với $AE < AF$) sao cho AE nằm giữa AO và AC . Đoạn thẳng BC cắt AO và AF lần lượt tại H và D .

a) Chứng minh: 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AC^2 = AE.AF$ và tứ giác $EHOA$ nội tiếp.

c) Đường thẳng qua E và song song với BF cắt AB, BC lần lượt tại M và N .

Chứng minh: E là trung điểm của MN .

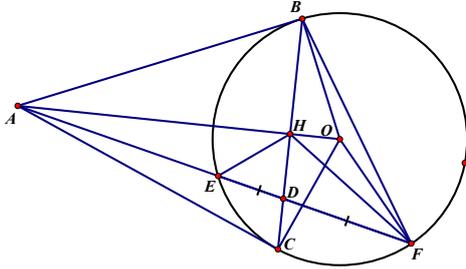
Bài V. (0,5 điểm)

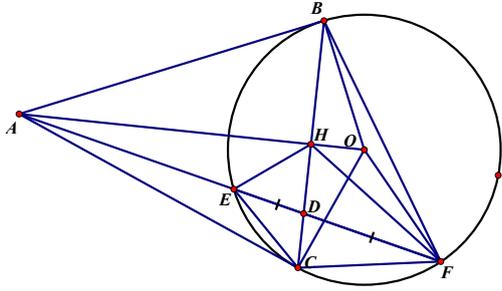
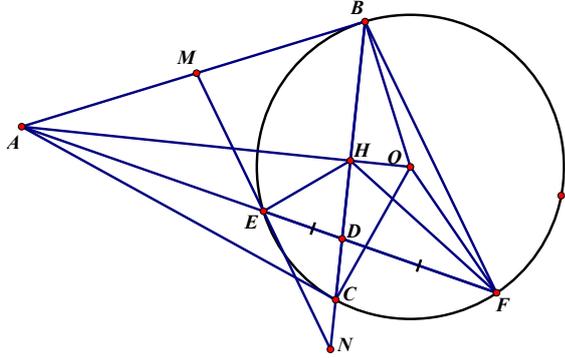
Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài / Câu	Nội dung	Biểu điểm
Bài I. (2,0đ) a) 0,5đ b) 1,0đ c) 0,5đ	+Thay $x=9$ (tm) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{9}-2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$	0,25đ
	+ Vậy với $x=9$ thì $A=\frac{1}{6}$	0,25 đ
	$B = \frac{3.(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}+16}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
	$B = \frac{53\sqrt{x}-6+2\sqrt{x}+16}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
	$B = \frac{5\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
$B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} \text{ (đpcm)}$	0,25 đ	
$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{5}{\sqrt{x}-2} = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$	0,25 đ	
$P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \geq 0$		
$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \geq 0$		
Th1: $2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x=4$ (ktm)	0,25 đ	
Th2: $2 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < 4$		
Kết hợp điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1;2;3\}$		
Bài II. (2,0đ)	Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ), thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y (giờ) ($x, y > 6$)	0,25đ
	+ Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)	0,25đ
	+ Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)	
	++ Trong 1 giờ cả 2 người làm được $\frac{1}{6}$ (công việc)	0,25đ
Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$		
+ Trong 2 giờ người thứ nhất làm được $\frac{2}{x}$ (công việc)	0,25đ	
+ Trong 3 giờ người thứ hai làm được $\frac{3}{y}$ (công việc)		
+ Vì khi đó 2 người làm được $\frac{2}{5}$ công việc nên ta có phương trình: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5}$		

	+ Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$ (TM)	0,5đ
	KL+ Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là 10 giờ, thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.	0,25đ
Bài III. (2,0đ) a) 1,0đ b) 1,0đ	1. $\begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{3}{\sqrt{y}-2} = -1 \\ \frac{2}{x+3} + \frac{4}{\sqrt{y}-2} = 3 \end{cases}$ ĐK: $y \geq 0; y \neq 4; x \neq -3$	0,25đ
	Đặt $\frac{1}{x+3} = a, \frac{1}{\sqrt{y}-2} = b$ ($a, b \neq 0$)	0,25đ
	Hệ pt thành: $\begin{cases} a - 3b = -1 \\ 2a + 4b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b = -2 \\ 2a + 4b = 3 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ (TM)	0,25đ
	$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{y}-2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 16 \end{cases}$ (TMDK)	0,25đ
	Vậy hpt có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; 16)$	
	2. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = -x + 2$ Giải được nghiệm: $x_1 = 1$ hoặc $x_2 = -2$	0,25 đ
	Tìm được tọa độ giao điểm $B(1;1), A(-2;4)$	0,25 đ
H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox. Tính được: $AH = 4, OH = 2, BK = 1, OK = 1, HK = 3$	0,25 đ	
Tính được: $S_{\Delta OAB} = 3$ (đvdt)	0,25 đ	
Bài IV. (3,5đ) a) 1,5đ b) 1,5đ c) 0,5đ		0,25đ
	$\widehat{ABO} = 90^\circ$	0,5đ

	$\widehat{ACO} = 90^0$	
	Xét tứ giác ABOC có : $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$	0,25đ
	Mà hai góc này là hai góc ở vị trí đối nhau	0,25đ
	\Rightarrow Tứ giác ABOC nội tiếp	0,25đ
	b)	
		
	Cm: $\widehat{ACE} = \widehat{AFC}$	0,25đ
	ΔAEC đồng dạng ΔACF (g.g)	0,25đ
	$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AF$	0,25đ
	Cm: ΔAEH đồng dạng ΔAOF (c.g.c)	0,5đ
	$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AFO}$	0,25đ
	\Rightarrow Tứ giác HOFE nội tiếp	
	c)	
		
	Cm: HD là phân giác \widehat{NHM}	0,25đ
	$\Rightarrow \frac{DE}{DF} = \frac{HE}{HF}$ (1)	
	HA là phân giác góc ngoài ΔNHM	
	$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF}$ (2)	
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF}$	
	$EN \parallel BF \Rightarrow \frac{EN}{BF} = \frac{ED}{DF}$	0,25đ
	$EM \parallel BF \Rightarrow \frac{EM}{BF} = \frac{AE}{AF}$	
	$\Rightarrow \frac{EN}{BF} = \frac{EM}{BF} \Rightarrow EN = EM \Rightarrow E$ là trung điểm NM	
Bài V. (0,5đ)	Ta có: $a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2$ Áp dụng BĐT $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có:	0,25đ

	$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + 1 \geq 2b$ Suy ra: $(a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2 = 2(ab + b + 1)$ $\Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$ Tương tự: $b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2(bc + c + 1)$ $c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2(ca + a + 1)$ Do đó: $VT \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \right)$ (1)	
	Mặt khác: Do $abc = 1$ nên $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{b+1+ab} + \frac{b}{1+ab+b}$ $= \frac{ab+b+1}{ab+b+1} = 1$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$	0,25đ

**Lưu ý: HS làm cách khác chính xác, GV vẫn cho điểm tối đa*

Bài I. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; $Q = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 4$.
- Rút gọn P .
- Tìm x nguyên để biểu thức $A = P.Q$ nguyên.

Bài II. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 160m. Nếu tăng chiều rộng thêm 10m và giảm chiều dài đi 10m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 100m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất?

Bài III. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y+1) = xy + 4 \\ (x+2)(y-1) = xy - 10 \end{cases}$$

2. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).
- Tính diện tích tam giác OAB với A và B là các giao điểm của (d) với (P).
(Biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn hoành độ của điểm B).

Bài IV. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O), lấy điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ hai tiếp tuyến MB và MC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MNP (với $MN < MP$) sao cho MN nằm giữa MO và MC . Đoạn thẳng BC cắt MO và MP lần lượt tại H và K .

- Chứng minh: Tứ giác $MBOC$ nội tiếp.
- Chứng minh: $MC^2 = MN.MP$ và 4 điểm H, O, P, N cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là trung điểm của BH , đường thẳng đi qua I và vuông góc với OI cắt MB, MC tại D, E . Chứng minh: E là trung điểm của MC .

Bài V. (0,5 điểm)

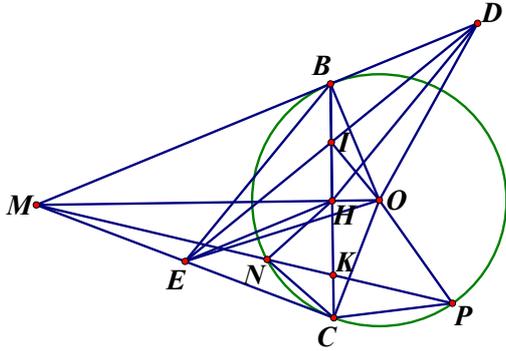
Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài / Câu	Nội dung	Biểu điểm
Bài I. (2,0đ) a) 0,5đ b) 1,0đ c) 0,5đ	a) Thay $x = 4$ (tm) vào biểu thức Q ta được $Q = \frac{\sqrt{4}}{4\sqrt{4}-1} = \frac{2}{7}$ Vậy với $x = 4$ thì $Q = \frac{2}{7}$	0,25đ 0,25 đ
	b) $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} + \frac{x}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$	0,25 đ
	$P = \frac{\sqrt{x}+1+x}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$	0,25 đ
	$P = \frac{\sqrt{x}+1+x}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0,25 đ
	$P = \frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}}$	0,25 đ
	c) $A = P.Q = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ Th1 $x \in \mathbb{Z}$ mà $\sqrt{x} \in \mathbb{I}$ suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{I}$ (loại) Th2 $x \in \mathbb{Z}$ mà $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ $A \in \mathbb{Z}$ khi 1 : $\sqrt{x} - 1$ hay $\sqrt{x} - 1 \in U_{(1)} = \{1; -1\}$ $\sqrt{x} - 1 = 1$ $x = 1 + 1 = 2$ (tm) $\sqrt{x} - 1 = -1$ $x = 0$ (ktm) Vậy $x=2$ thì A đạt giá trị nguyên.	0,25 đ
Bài II. (2,0đ)	+ Gọi chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là x (m), chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là y (m) ($x > 10, y > 0, x > y$)	0,25đ
	+ Diện tích ban đầu mảnh đất là xy (m ²)	0,25đ
	+ Vì chu vi mảnh đất hình chữ nhật là 160m nên ta có phương trình: $2(x + y) = 160 \Leftrightarrow x + y = 80$	0,25đ
	+ Nếu tăng chiều rộng thêm 10m và giảm chiều dài đi 10m thì Chiều dài là: $x - 10$ (m) Chiều rộng là: $y + 10$ (m) Diện tích là: $(x - 10)(y + 10)$ (m ²)	0,25đ
	+ Vì diện tích mảnh đất tăng thêm 100m ² nên ta có phương trình: $(x - 10)(y + 10) = xy + 100$	0,25đ
	+ Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 80 \\ (x - 10)(y + 10) = xy + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \end{cases} \text{ (TM)}$	0,5đ

	+ Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 50m, chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 30m.	0,25đ
Bài III. (2,0đ) a) 1,0đ b) 1,0đ	1. Ta có $\begin{cases} (x-1)(y+1) = xy + 4 \\ (x+2)(y-1) = xy - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - y + x - 1 = xy + 4 \\ xy + 2y - x - 2 = xy - 10 \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$	0,25đ
	Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(2; -3)$	0,25đ
	2. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = x + 2$ Giải được nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = 2$	0,25 đ
	Tìm được tọa độ giao điểm $A(-1;1), B(2;4)$	0,25 đ
	H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox. Tính được: $AH = 1, OH = 1, BK = 4, OK = 2, HK = 3$	0,25 đ
	Tính được $S_{\Delta OAB} = 3$ (đvdt)	0,25 đ
Bài IV. (3,5đ) a) 1,5đ b) 1,5đ c) 0,5đ		0,25đ
	$\widehat{MBO} = 90^0$ $\widehat{MCO} = 90^0$	0,5đ
	Xét tứ giác MBOC có : $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$	0,25đ
	Mà hai góc này là hai góc ở vị trí đối nhau	0,25đ
	\Rightarrow Tứ giác MBOC nội tiếp	0,25đ
	b)	
	Cm: $\widehat{MCN} = \widehat{MPC}$	0,25đ
	ΔMNC đồng dạng ΔMCP (g.g)	0,25đ
	$\frac{MN}{MC} = \frac{MC}{MP} \Rightarrow MC^2 = MN.MP$	0,25đ

	Cm: $\triangle MNH$ đồng dạng $\triangle MOP$ (c.g.c)	0,5đ
	$\Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MPO}$ \Rightarrow Tứ giác HOPN nội tiếp	0,25đ
	c) 	
	Cm: $\triangle ODE$ cân tại O H là trung điểm BC	0,25đ
	Cm: Tứ giác EBDH là hình bình hành $\Rightarrow EH \parallel BD$ hay $EH \parallel MB$ Mà H trung điểm BC. Vậy E là trung điểm MC	0,25đ
Bài V. (0,5đ)	ĐKXĐ: $x \geq 4$ và $y \geq 4$ (*) - Đặt $a = \sqrt{x-4}; b = \sqrt{y-4}$ (ĐK : $a \geq 0; b \geq 0$) $2[(a^2+4)b+(b^2+4)a] = (a^2+4)(b^2+4)$ $\Leftrightarrow \frac{2[(a^2+4)b+(b^2+4)a]}{(a^2+4)(b^2+4)} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{2b}{b^2+4} + \frac{2a}{a^2+4} = 1 \Leftrightarrow \frac{4b}{b^2+4} + \frac{4a}{a^2+4} = 2$ (1) -Ch/ minh Với $a \geq 0; b \geq 0$ thì $0 \leq \frac{4b}{b^2+4} \leq 1; 0 \leq \frac{4a}{a^2+4} \leq 1$. Do đó từ (1) suy ra $\frac{4b}{b^2+4} = \frac{4a}{a^2+4} = 1$ (2)	0,25đ
	Giải (2) ta được $a = b = 2$. Do đó $x = y = 8$ (TM ĐK) -Vậy $(x;y) = (8;8)$	0,25đ

*Lưu ý: HS làm cách khác chính xác, GV vẫn cho điểm tối đa