SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT YÊN LẠC 2

ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI KHỐI 11
MÔN: TOÁN – NĂM HỌC 2017-2018
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề
Đề thi gồm: 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3\sin 5x-4\cos 5x-2m+3}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b. Giải phương trình $2(1+\cos x)(1+\cot^2 x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Một tứ giác có bốn góc tạo thành một cấp số nhân và số đo góc lớn nhất gấp 8 lần số đo góc nhỏ nhất. Tính số đo các góc của tứ giác trên.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=4(n+2)$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu – tơn của $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình H. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông?

Câu 5 (1,0 điểm). Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, hai điểm A và B nằm trên đường thẳng $x-3y+11=0$, điểm A có hoành độ dương, trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ và chu vi của tam giác ABC bằng $3\sqrt{10}+5\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M là điểm nằm trên SB sao cho $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA. Tính theo a diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

b. E là một điểm thay đổi trên cạnh AC. Xác định vị trí điểm E để ME vuông góc với CD.

Câu 8 (1,0 điểm). Xét phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ với a, b là các số thực, $a\neq 0, a\neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2-3ab-10a}{a^2}.$$

-------------**Hết**-----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………….……….…….……….….; Số báo danh……………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT YÊN LẠC 2

ĐÁP ÁN KSCL ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI KHỐI 11
MÔN: TOÁN – NĂM HỌC 2017-2018
Đáp án gồm: 05 trang

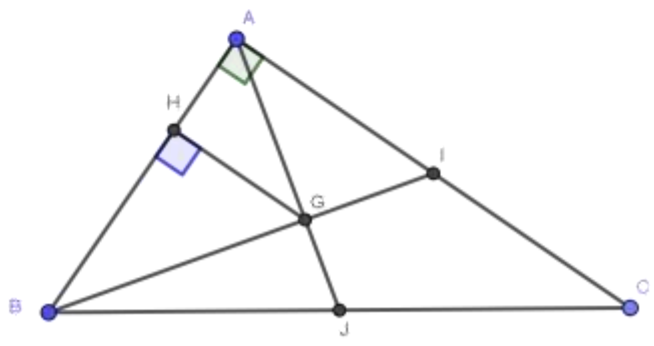
I. LƯU Ý CHUNG:

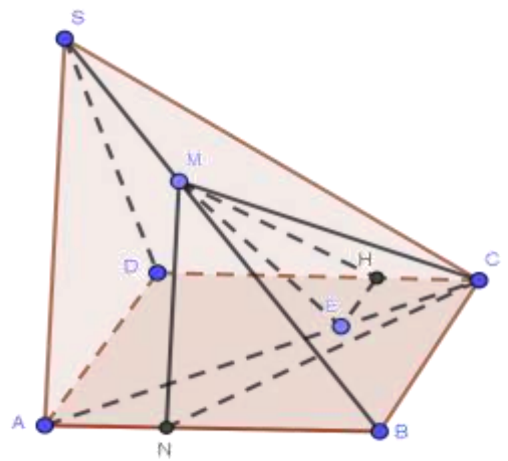
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	**(2,0 điểm)**	
	a.(1,0 điểm).	
	Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)=3\sin 5x-4\cos 5x-2m+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$	**0,25**
	Ta có: $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 5x-\frac{4}{5}\cos 5x>\frac{2m-3}{5},\forall x\in\mathbb{R}.$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \sin(5x-\varphi)>\frac{2m-3}{5},\forall x\in\mathbb{R}$ với $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{3}{5}\\ \sin\varphi=\frac{4}{5}\end{cases}.$ Do $-1\le\sin(5x-\varphi)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{2m-3}{5}<-1\Leftrightarrow m<-1.$ Vậy $m<-1.$	**0,5**
	b.(1,0 điểm)	
	ĐK: $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \sin x+\cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne k\pi\\ x\ne-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$ $Pt\Leftrightarrow 2(1+\cos x).\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\frac{2}{1-\cos x}=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}\Leftrightarrow\sin x+\cos x+\sin x.\cos x+1=0$	**0,25**
	Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}),-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2},$ Phương trình trở thành: $t+\frac{t^2-1}{2}+1=0\Leftrightarrow t=-1.$	**0,25**
	Với $t=-1,$ ta có $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi(tm)\\ x=\pi+k2\pi(l)\end{array}\right..$ Vậy phương trình có họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi.$	**0,25**

2	**(1,0 điểm)**	
	Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A<B<C<D$) theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân thỏa mãn yêu cầu với công bội q. Ta có: $B=qA, C=q^2A, D=q^3A.$	**0,25**
	Theo gt, ta có : $\begin{cases} A+B+C+D=360 \\ D=8A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1+q+q^2+q^3)=360 \\ Aq^3=8A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ A=24^0 \end{cases}.$	**0,5**
	Suy ra $B=48^0, C=96^0, D=192^0.$	**0,25**
3	**(1,0 điểm)**	
	ĐK: $n\ge 0$, ta có $\dfrac{(n+4)!}{(n+1)!.3!}-\dfrac{(n+3)!}{n!.3!}=4(n+2)\Leftrightarrow \dfrac{(n+4)(n+3)}{6}-\dfrac{(n+3)(n+1)}{6}=4$ $\Leftrightarrow 3n=15\Leftrightarrow n=5.$	**0,25**
	Với $n=5,$ ta có $P=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ Xét khai triển: $x(1-2x)^5=x\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^k(-2x)^k$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $k=4$ và ta có $a_5=C_5^4(-2)^4=80$ Xét khai triển: $x^2(1+3x)^{10}=x^2\sum\limits_{m=0}^{10}C_{10}^k(3x)^m$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $m=3$ và ta có $a_5=C_{10}^3.3^3=3240.$	**0,5**
	Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là: $a_5=80+3240=3320.$	**0,25**
4	**(1,0 điểm)**	
	Số phần tử của không gian mẫu là $\lvert\Omega\rvert=C_{24}^4=10626.$ Đa giác đều 24 đỉnh có 12 đường chéo qua tâm. Cứ 2 đường chéo qua tâm tương ứng cho ta một hình chữ nhật hoặc hình vuông. Số hình chữ nhật và hình vuông được tạo thành là $C_{12}^2.$	**0,25**
	Giả sử $A_1, A_2,..., A_{24}$ là 24 đỉnh của hình H. Vì H là đa giác đều nên 24 đỉnh nằm trên 1 đường tròn tâm O. Góc $A_iOA_{i+1}=\dfrac{360^0}{24}=15^0$ với $i=1,2,...,23$ Ta thấy: $A_1OA_7=A_7OA_{14}=A_{14}OA_{21}=90^0$, do đó $A_1A_7A_{14}A_{21}$ là một hình vuông, xoay hình vuông này 15^0 ta được hình vuông $A_2A_8A_{15}A_{22}$, cứ như vậy ta được 6 hình vuông.	**0,5**
	Số hình chữ nhật không là hình vuông là: $C_{12}^2-6=60.$ Vậy xác suất cần tính là: $\dfrac{60}{C_{24}^4}=\dfrac{10}{1771}.$	**0,25**
5	**(1,0 điểm)**	
	Đặt $\dfrac{f(x)-20}{x-2}=g(x)\Rightarrow f(x)-20=(x-2).g(x)$	**0,25**
	Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)\Rightarrow g(2)=10.$ Lại có: $f(2)-20=0\Rightarrow f(2)=20$.	**0,25**
	Suy ra:	**0,5**

	$A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6(f(x)-20)}{(x-2)(x+3)(\sqrt[3]{(6f(x)+5)^2}+5\sqrt[3]{6f(x)+5}+25)}$ $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6.g(x)}{(x+3)(\sqrt[3]{(6f(x)+5)^2}+5\sqrt[3]{6f(x)+5}+25)}=\dfrac{6.g(2)}{5(\sqrt[3]{(6f(2)+5)^2}+5\sqrt[3]{6f(2)+5}+25)}$ $=\dfrac{4}{25}.$	
6	**(1,0 điểm)**	
	Gọi H là hình chiếu của G trên đoạn $AB\Rightarrow H(0;\frac{11}{3})$; $GH=d(G,AB)=\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC .Ta có $AC=2AI=2.\frac{3}{2}.GH=2\sqrt{10}$. Ta có: $\begin{cases} BC^2-AB^2=AC^2=(2\sqrt{10})^2=40 \\ BC+AB=3\sqrt{10}+5\sqrt{2}-AC=\sqrt{10}+5\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} BC=5\sqrt{2} \\ AB=\sqrt{10} \end{cases}.$	**0,5**
	$AG=\frac{2}{3}.AJ=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.BC=\frac{5\sqrt{2}}{3}.$ Gọi $A(3a-11,a)\in AB$. Ta có $AG=\frac{5\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow 3a^2-22a+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=\frac{10}{3} \end{array}\right.$. Với $a=4\Rightarrow A(1;4)$ Với $a=\frac{10}{3}\Rightarrow A(-1;\frac{10}{3})$ (l).	**0,25**
	Ta có: $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AH}\Rightarrow B(-2;3)$; $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}\Rightarrow I(2;1)$. Do I là trung điểm của $AC\Rightarrow C(3;-2)$. Vậy $A(1;4)$; $B(-2;3)$; $C(3;-2)$.	**0,25**
		
7	**(2,0 điểm)**	
	a.(1,0 điểm)	
	Từ M kẻ $MN//SA\,(N\in AB)$. Khẳng định thiết diện là tam giác CMN.	**0,25**
	Ta có: $\frac{MN}{SA}=\frac{BM}{BS}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN=\frac{2a}{3}$. Xét ΔSMC có: $MC^2=SM^2+SC^2-2.SM.SC.\cos MSC=\frac{a^2}{9}+a^2-2.\frac{a}{3}.a.\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{9}$ $\Rightarrow MC=\frac{a\sqrt{7}}{3}.$	**0,25**

	$CN=\sqrt{BN^2+CB^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{9}+a^2}=\frac{\sqrt{13}a}{3}.$	
	Có $\cos CMN=\frac{MN^2+MC^2-CN^2}{2.MC.MN}=\frac{\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}-\frac{13a^2}{9}}{2.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{2a}{3}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}.$ Suy ra $\sin CMN=\sqrt{1-\cos^2 CMN}=\frac{3\sqrt{21}}{14}.$	**0,25**
	Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta CMN}=\frac{1}{2}.MC.MN.\sin CMN=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$ (đvdt).	**0,25**
	b.(1,0 điểm)	
	Đặt $CE=xCA$. Kẻ $EH\perp CD\,(H\in CD)\Rightarrow EH//AD$ nên $CH=xCD$ Suy ra $\overrightarrow{CH}=x\overrightarrow{CD}$.	**0,25**
	$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CD}-(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB})$ $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HE}$	**0,25**
	Để ME vuông góc CD điều kiện là: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HE}).\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CD}=0$ do $HE\perp CD.$ $\Leftrightarrow\left[x\overrightarrow{CD}-(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB})\right].\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow x\overrightarrow{CD}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD}=0$ do $CB\perp CD$	**0,25**
	Do ΔSCD đều nên $\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD}=CS.CD.\cos60^0=\frac{1}{2}a^2$. Do đó $x.a^2-\frac{2}{3}.\frac{1}{2}a^2=0\Leftrightarrow a^2(x-\frac{1}{3})=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$ Vậy E thuộc đoạn AC thỏa mãn $CE=\frac{1}{3}CA.$	**0,25**
		
8	**(1,0 điểm)**	
	Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1,x_2,x_3>0.$	**0,25**

	Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=x_1.x_2.x_3=\dfrac{1}{a}>0 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{b}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow a,b>0.$ Đặt $t=\dfrac{1}{a}\ (t>0).$ Ta có: $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3\le(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3})^3$ (áp dụng BĐT Côsi) $\Rightarrow t\le\dfrac{t^3}{27}\Leftrightarrow t\ge3\sqrt{3}.$	
	Ta lại có: $x_1x_2+x_1x_3+x_3x_1\le\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}\Rightarrow-3(x_1x_2+x_1x_3+x_3x_1)\ge-(x_1+x_2+x_3)^2=-t^2.$	**0,25**
	Khi đó $P=\dfrac{2-3ab-10a}{a^2}=2.\dfrac{1}{a^2}-3\dfrac{b}{a}-10\dfrac{1}{a}\ge t^2-10t.$	**0,25**
	Xét hàm $f(t)=t^2-10t, t\ge3\sqrt{3}.$ Ta được $\min\limits_{x\in[3\sqrt{3};+\infty)} f(t)=27-30\sqrt{3}\Leftrightarrow t=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \\ b=\sqrt{3} \end{cases}.$ Với $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ thay vào thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy $\min P=27-30\sqrt{3}.$	**0,25**