SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA - VŨNG TÀU

ĐỀ THI OLYMPIC 27 THÁNG 4 LỚP 8
NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(*Đề thi có 01 trang*)

Môn: TOÁN
Thời gian làm bài thi: 120 phút
Ngày thi: 23/3/2023

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Chứng minh $n(n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

2) Phân tích đa thức $x^3+6x^2y+5xy^2$ thành nhân tử.

Câu 2 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2-2020 chia hết cho $n-45$.

2) Cho x và y là các số hữu tỉ khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{1-2x}{1-x}+\dfrac{1-2y}{1-y}=1$.

Chứng minh $B=x^2+y^2-xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2x=y^2+2y+5$.

2) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\cdot$$

Câu 4 (4,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}-\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1\right)$ (với $x\neq 0;\ x\neq 2$).

2) Giải phương trình $\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{7}{x^2+3}-\dfrac{6+3x^2}{x^2+5}=0\cdot$

Câu 5 (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ có đường cao AH và đường phân giác AM. Kẻ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F. Gọi K là giao điểm của AH và ME. Tia BK cắt AC tại L.

1) Chứng minh $CM.CH=CF.CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

3) Chứng minh $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{HB}{HC}\cdot$

Câu 6 (2,0 điểm).

Cho góc xOy nhọn và điểm A cố định nằm trong góc xOy. Đường thẳng d di động đi qua A và cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B, C. Tìm điều kiện của đường thẳng d đối với OA để $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$ đạt giá trị lớn nhất.

-----------**HẾT**----------

Họ và tên thí sinh:……………………………… Chữ ký CBCT số 1:…………………………
Số báo danh:……………………………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU	**KỲ THI OLYMPIC 27 THÁNG 4 LỚP 8 NĂM HỌC 2022 - 2023**

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
MÔN: TOÁN
(*Hướng dẫn chấm có 04 trang*)

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Chứng minh $n(n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

2) Phân tích đa thức $x^3+6x^2y+5xy^2$ thành nhân tử.

Câu 1	**Nội dung**	**Điểm**
1.1 (1,5 đ)	$n(n+1)(2n+1)=n(n+1)(n-1+n+2)$	0,5
	$=n(n+1)(n-1)+n(n+1)(n+2)$	0,5
	Mà $n(n+1)(n-1)$ và $n(n+1)(n+2)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên đều chia hết cho 6	0,25
	Vậy $n(n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6.	0,25
1.2 (1,5 đ)	$x^3+6x^2y+5xy^2=x\left(x^2+6xy+5y^2\right)$	0,5
	$=x\left[x(x+5y)+y(x+5y)\right]$	0,5
	$=x(x+y)(x+5y)$	0,5

Câu 2 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2-2020 chia hết cho $n-45$.

2) Cho x và y là các số hữu tỉ khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{1-2x}{1-x}+\dfrac{1-2y}{1-y}=1.$

Chứng minh $B=x^2+y^2-xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 2	**Nội dung**	**Điểm**
2.1 (1,5 đ)	$n^2-2020=n^2-2025+5=(n-45)(n+45)+5$	0,5
	Do đó $\left(n^2-2020\right)\vdots(n-45)\Leftrightarrow 5\vdots(n-45)$	0,5
	$\Leftrightarrow n-45\in\{1;\,5;\,-1;\,-5\}\Leftrightarrow n\in\{46;\,50;\,44;\,40\}$	0,5
2.2 (1,5 đ)	$\dfrac{1-2x}{1-x}+\dfrac{1-2y}{1-y}=1\Rightarrow(1-2x)(1-y)+(1-2y)(1-x)=(1-x)(1-y)$	0,25
	$\Leftrightarrow 3xy=2(x+y)-1$	0,5
	$B=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$	0,25
	$=(x+y)^2-2(x+y)+1$	0,25
	$=(x+y-1)^2$	0,25

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2x=y^2+2y+5.$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}.$$

Câu 3	Nội dung	Điểm
3.1 (1,5 đ)	$x^2+2x=y^2+2y+5 \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2(x-y)=5 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+2)=5$	0,25x2
	$*\begin{cases}x-y=1\\x+y+2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ $*\begin{cases}x-y=5\\x+y+2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ $*\begin{cases}x-y=-1\\x+y+2=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}$ $*\begin{cases}x-y=-5\\x+y+2=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$ Vậy các cặp nghiệm nguyên (x; y) cần tìm là (2; 1); (2; -3); (-4; -3); (-4; 1)	0,25x4
3.2 (1,5 đ)	Ta có $(a+1)^2+b^2+1=a^2+b^2+2a+2 \ge 2ab+2a+2=2(ab+a+1)$	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{1}{(a+1)^2+b^2+1} \le \dfrac{1}{2(ab+a+1)}$	0,25
	Tương tự ta có: $\dfrac{1}{(b+1)^2+c^2+1} \le \dfrac{1}{2(bc+b+1)}$ và $\dfrac{1}{(c+1)^2+a^2+1} \le \dfrac{1}{2(ac+c+1)}$	0,25
	$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ac+c+1}\right)$ $\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{abcb+abc+bc}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{b}{abc+bc+b}\right)$	0,25
	$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{bc+b+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}\right)=\dfrac{1}{2}$	0,25
	$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$, khi $a=b=c=1$	0,25

Câu 4 (4,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}-\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1\right)$ (với $x \ne 0;\ x \ne 2$).

2) Giải phương trình $\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{7}{x^2+3}-\dfrac{6+3x^2}{x^2+5}=0\cdot$

Câu 4	Nội dung	Điểm
4.1 (2,0 đ)	$A=\left(\dfrac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}-\dfrac{x^2-2x}{2(x^2+4)}\right)\cdot\dfrac{2+x-x^2}{x^2}$	0,5
	$=\dfrac{4x^2-(x^2-2x)(2-x)}{2(2-x)(x^2+4)}\cdot\dfrac{(2-x)(1+x)}{x^2}$	0,5
	$=\dfrac{x^3+4x}{2(2-x)(x^2+4)}\cdot\dfrac{(2-x)(1+x)}{x^2}$	0,5
	$=\dfrac{x(x^2+4)}{2(2-x)(x^2+4)}\cdot\dfrac{(2-x)(1+x)}{x^2}=\dfrac{x+1}{2x}$	0,5
4.2 (2,0 đ)	$PT \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{x^2+1}-1\right)+\left(\dfrac{7}{x^2+3}-1\right)+\left(2-\dfrac{6+3x^2}{x^2+5}\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \dfrac{4-x^2}{x^2+1}+\dfrac{4-x^2}{x^2+3}+\dfrac{4-x^2}{x^2+5}=0$	0,5

	$\Leftrightarrow \left(4-x^2\right)\left(\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+3}+\dfrac{1}{x^2+5}\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$	0,5

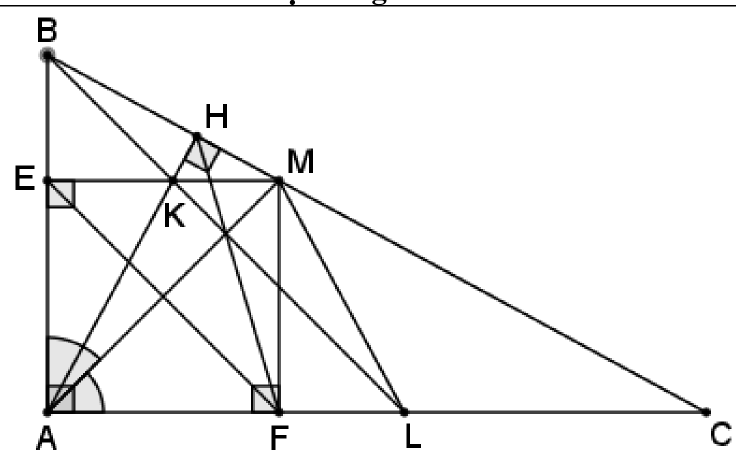
Câu 5 (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AB<AC\right)$ có đường cao AH và đường phân giác AM. Kẻ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F. Gọi K là giao điểm của AH và ME. Tia BK cắt AC tại L.

1) Chứng minh $CM.CH=CF.CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

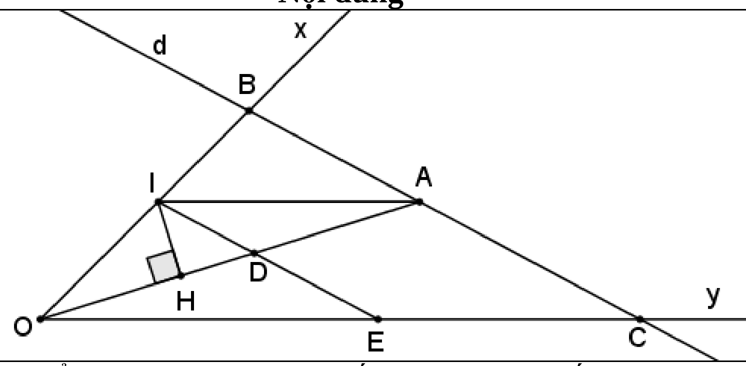
3) Chứng minh $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{HB}{HC}$.

Câu 5	Nội dung	Điểm
		
5.1 (2,0 đ)	*** Chứng minh *CH.CM = CF.CA*.** Xét ΔCHA và ΔCFM ta có: ACH là góc chung, $CHA=CFM=90^0$	0,5x2
	Suy ra ΔCHA đồng dạng ΔCFM (g.g)	0,25
	Suy ra $\dfrac{CH}{CF}=\dfrac{CA}{CM}\Rightarrow CH.CM=CF.CA$	0,25
	*** Chứng minh *HF* là tia phân giác của góc *AHC*.**	
	Xét ΔCHF và ΔCAM ta có: HCF là góc chung, $\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{CF}{CM}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta CHF$ đồng dạng ΔCAM (c.g.c) $\Rightarrow CHF=CAM$	0,25
	Mà $CAM=45^0$ (*AM* là đường phân giác góc vuông) $\Rightarrow CHF=AHF=45^0 \Rightarrow HF$ là tia phân giác của góc *AHC*.	0,25
5.2 (1,5 đ)	Tam giác ABM có K là trực tâm (giao điểm hai đường cao)	0,5
	$\Rightarrow$ BK $\perp$ AM $\Rightarrow AM \perp BL$	0,25
	$\Rightarrow$ AM là đường trung trực của BL.	0,25
	Suy ra MB = ML.	0,25
	Vậy tam giác *MBL* cân tại *M*.	0,25

	Vì HF là tia phân giác của góc AHC nên $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AH}{HC}\ (1)$.	0,25
5.3 **(1,5 đ)**	Chứng minh tương tự HE là tia phân giác của góc AHB nên $\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{BH}{AH}\ (2)$	0,5
	AEMF là hình vuông nên AE = AF.	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{AF}{FC}.\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{AH}{HC}.\dfrac{BH}{AH}\ \Rightarrow \dfrac{BE}{FC}=\dfrac{HB}{HC}$	0,5

Câu 6 (2,0 điểm).

Cho góc xOy nhọn và điểm A cố định nằm trong góc xOy. Đường thẳng d di động đi qua A và cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B, C. Tìm điều kiện của đường thẳng d đối với OA để $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6	Nội dung	Điểm
		
	Qua A kẻ đường thẳng song song với Oy cắt tia Ox tại I (I cố định), qua I kẻ đường thẳng song song với d cắt Oy tại E. Gọi D là giao điểm của OA và IE; H là chân đường vuông góc kẻ từ I đến OA.	0,25
	Ta có: $\dfrac{ID}{AB}=\dfrac{DE}{AC}$ (vì cùng bằng $\dfrac{OD}{OA}$)	0,25
(2,0 đ)	Xét biểu thức: $\dfrac{ID}{AB}+\dfrac{ID}{AC}=\dfrac{DE}{AC}+\dfrac{ID}{AC}=\dfrac{IE}{AC}$ Mà IE = AC (tứ giác IACE là hình bình hành) nên $\dfrac{ID}{AB}+\dfrac{ID}{AC}=1$ $\Rightarrow \dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{ID}$	0,25x3
	Do đó $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$ lớn nhất khi $\dfrac{1}{ID}$ lớn nhất	0,25
	$\Leftrightarrow ID$ nhỏ nhất	0,25
	$\Leftrightarrow D\equiv H \Leftrightarrow d\perp OA$	0,25

------- HẾT --------