SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG**	**KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4 LẦN THỨ XXVI - NĂM 2021** *Ngày thi: 03/4/2021* MÔN THI: **TOÁN** – KHỐI: **11**
ĐỀ CHÍNH THỨC	THỜI GIAN: **180 phút** *Hình thức làm bài: Tự luận* *Đề thi có **01** trang*

Lưu ý: - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ câu số mấy ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. (4,0 điểm) Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 2. Chứng minh rằng:

$$2\sqrt{2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < 2+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y))=xf\left(1+f\left(\frac{y}{x}\right)\right) \text{ với mọi } x,y\in(0;+\infty).$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a. Cho m,n là các số nguyên dương sao cho $2m-n$ là ước dương của $n-1$. Chứng minh rằng phương trình $x^{2m}+y^{2m}=(x+y)^n$ có nghiệm nguyên dương.

b. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho phương trình $x^{304}+y^{304}=(x+y)^n$ có nghiệm nguyên dương?

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A',B',C' là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C. Một đường tròn qua B',C' tiếp xúc với cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của (O) tại A_1. Các điểm B_1,C_1 xác định tương tự.

a. Chứng minh rằng $\dfrac{A_1B}{A_1C}=\sqrt{\dfrac{\cot B}{\cot C}}$.

b. Vẽ các hình bình hành B_1ABX, C_1ACY. Chứng minh rằng các điểm X, Y, A_1 và A_0 thuộc một đường tròn với AA_0 là đường kính của (O).

c. Vẽ các hình bình hành $BA_1CA_2, CB_1AB_2, AC_1BC_2$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Câu 5. (4,0 điểm) Bộ hai số nguyên khác không (x,y) được gọi là "bộ số đẹp" nếu x là số lẻ, y là số chẵn, x,y nguyên tố cùng nhau và x^2+y^2 là số chính phương.

a. Chứng minh rằng (x,y) là "bộ số đẹp" khi và chỉ khi tồn tại 2 số nguyên u,v khác 0 và khác tính chẵn lẻ, nguyên tố cùng nhau sao cho $(x,y)=(u^2-v^2,2uv)$.

b. Với mỗi "bộ số đẹp" (x,y) ta có thể tạo ra 1 "bộ số đẹp" mới bởi 1 trong 2 phép biến đổi: hoặc đổi dấu của 1 trong 2 số hoặc cộng 1 số nguyên k nào đó vào cả 2 số sao cho $(x+k,y+k)$ là "bộ số đẹp". Chứng minh rằng với bất kỳ 2 bộ số đẹp (x,y) và (z,t) cho trước ta luôn có thể biến đổi từ (x,y) thành (z,t) sau hữu hạn các bước biến đổi như trên.

HẾT

Họ tên thí sinh: ....*SBD:*...............................

Trường: ....*Tỉnh/TP:* ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

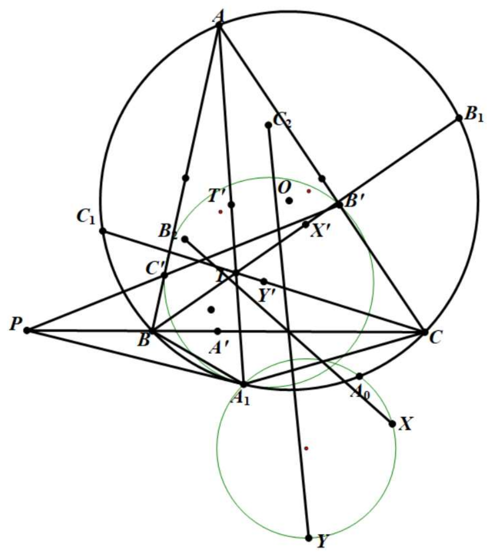
ĐÁP ÁN

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVI - NĂM 2021
Ngày thi: 03/4/2021
MÔN THI: **TOÁN 11 -** THỜI GIAN: **180 phút**
Hình thức làm bài: Tự luận
*Đáp án có **06** trang*

	Nội dung	**Điểm**
Bài 1	Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi có tổng bằng 2. Chứng minh rằng $$2\sqrt{2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < 2+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$	**4**
	Cách 1: Xét $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(b,c)$, $\vec{w}=(c,a)$. $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(a+b+c,a+b+c)=(2;2)$ Ta có $\lvert\vec{u}\rvert+\lvert\vec{v}\rvert+\lvert\vec{w}\rvert \ge \lvert\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\rvert \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \ge 2\sqrt{2}$. **Cách 2:** Ta có $a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \ge \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. Tương tự cho các số hạng còn lại, ta được $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \ge \sqrt{2}(a+b+c)=2\sqrt{2}$.	2
	Do bất đẳng thức đối xứng nên ta có thể giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Ta có $a^2+b^2 < \dfrac{a^2}{4}+ab+b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} < \dfrac{a}{2}+b$. $a^2+c^2 < \dfrac{a^2}{4}+ac+c^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+c^2} < \dfrac{a}{2}+c$. $\sqrt{b^2+c^2} < \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Cộng vế với vế, ta được $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < 2+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.	2

<table>
<tr><td>Bài 2</td><td>Tìm tất cả các hàm số thực $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x+f(y))=xf\left(1+f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$ với mọi số thực $x,y\in(0;+\infty)$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có $f(x+f(x))=xf\left(1+f\left(1\right)\right)=cx$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ (1) và
$c=f\left(1+f(1)\right)$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Thay x thành $x+f(x)$ vào (1)
Suy ra $f(x+f(x)+f(x+f(x)))=c(x+f(x))$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ (2).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Thế (1) vào (2): $f(x+f(x)+cx)=c(x+f(x))$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.
$\Leftrightarrow f((c+1)x+f(x))=c(x+f(x))$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ (3).
Mặt khác theo đề bài thì $f((c+1)x+f(x))=(c+1)xf\left(1+f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right)$ (4).
Từ (3) và (4), suy ra $(c+1)xf\left(1+f\left(\frac{1}{c+1}\right)\right)=c(x+f(x))$ với mọi
$x\in(0;+\infty)$.
Suy ra $f(x)=ax$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Do $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ nên
$a\in(0;+\infty)$.
Thử lại thấy thỏa mãn.</td><td>1</td></tr>
</table>

Bài 3	a) Cho m,n là các số nguyên dương sao cho $2m-n$ là ước nguyên dương của $n-1$. Chứng minh rằng phương trình $x^{2m}+y^{2m}=(x+y)^n$ có nghiệm nguyên dương.	**1**
	a) Chọn $x=y=2^{\frac{n-1}{2m-n}}\in\mathbb{Z}^+$ thì $x^{2m}+y^{2m}=(x+y)^n$. Suy ra phương trình có nghiệm nguyên dương.	1
	b) Có mấy số nguyên dương n sao cho phương trình $x^{304}+y^{304}=(x+y)^n$ có nghiệm nguyên dương.	2
	Nếu $n\geq 304$, vì $x,y>0$ ta có ngay $(x+y)^n>x^n+y^n\geq x^{304}+y^{304}$ nên phương trình không có nghiệm nguyên dương. Nếu $n=1$ thì $x^{304}+y^{304}=x+y$ có nghiệm nguyên dương $x=y=1$. Xét $2\leq n\leq 303$. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x,y). Đặt $x=da, y=db$ với $(a,b)=1$. Ta được $d^{304}\left(a^{304}+b^{304}\right)=d^n\left(a+b\right)^n \Leftrightarrow d^{304-n}(a^{304}+b^{304})=(a+b)^n$. (1)	0,5
	Cách 1. Đặt $d'=\left(a^{304}+b^{304},(a+b)^n\right)>1$. Nếu d' có ước nguyên tố lẻ p thì $p\mid a+b\Rightarrow p\mid a^{304}-b^{304}$ nên $p\mid 2a^{304}\Rightarrow p\mid a, p\mid b$ vô lý. Vậy $d'=2^k, k\in\mathbb{N}^*$. Do d' chẵn nên a,b cùng lẻ. Khi đó $a^{304}+b^{304}\equiv 2\,(\bmod 4)$ nên $d'=2$. Do $\frac{a^{304}+b^{304}}{2}\,\Big\vert\,\frac{(a+b)^n}{2}$ nên $\frac{a^{304}+b^{304}}{2}=1\Rightarrow a=b=1$. Thế vào (1): $d^{304-n}=2^{n-1}\,\vdots\,2$. Suy ra $d=2^k$ với $k\in\mathbb{N}^*$ và $n-1=k(304-n)$. Suy ra $n-1=n-304+303\,\vdots\,(304-n)\ \Rightarrow 304-n\mid 303$. Suy ra $n\in\left\{303,301,203\right\}$. Các giá trị này đều thỏa mãn (theo câu a).	2,5
	Cách 2. Từ (1) suy ra $a+b\mid d^{304-n}(a^{304}+b^{304})$. Lại có $a+b\mid (a^2-b^2)\Rightarrow a+b\mid d^{304-n}(a^{304}-b^{304})$ nên $a+b\mid 2d^{304-n}.a^{304}$ Do $\left(a+b,a\right)=1\ \Rightarrow\ a+b\mid 2d^{304-n}$ (2) **Trường hợp 1:** a,b cùng lẻ. $\Rightarrow 2d^{304-n}=(a+b)^k.r$ với $r\not\vdots\left(a+b\right), k\geq 1$ Thế vào (1): $r\left(a^{304}+b^{304}\right)=2\left(a+b\right)^{n-k}$ (3) Nếu $n=k$ thì $r\left(a^{304}+b^{304}\right)=2\Leftrightarrow r=1\wedge a^{304}+b^{304}=2$ (do a, b cùng lẻ) $\Leftrightarrow r=1=a=b$. Trường hợp này đã xét ở cách 1. Nếu $n>k$ thì (3) $\Rightarrow r\left(a^{304}+b^{304}\right)\vdots\, 2\left(a+b\right)$ Mà $r\left(a^{304}-b^{304}\right)\vdots\left(a^2-b^2\right)\vdots\, 2\left(a+b\right)$ Cộng vế với vế ta được $\Rightarrow ra^{304}\,\vdots\left(a+b\right)$ Mà $\left(a^{304},a+b\right)=1$ nên $r\,\vdots\,(a+b)$ (mâu thuẫn). **Trường hợp 2:** a, b khác tính chẵn lẻ $\Rightarrow a+b$ là số lẻ. Từ (2)$\Rightarrow a+b\mid d^{304-n}\Rightarrow d^{304-n}=(a+b)^l.s\left(l\geq 1, s\not\vdots\,(a+b)\right)$. Thế vào (1): $s(a^{304}+b^{304})=(a+b)^{n-l}>2\Rightarrow s\left(a^{304}+b^{304}\right)\vdots\left(a+b\right)$. Mà $s\left(a^{304}-b^{304}\right)\vdots\left(a^2-b^2\right)\vdots\left(a+b\right)$. Cộng vế với vế ta được $\Rightarrow 2sa^{304}\,\vdots\left(a+b\right)$ Mà $\left(2a^{304},a+b\right)=1$ nên $s\,\vdots\,(a+b)$ (mâu thuẫn).	2,5

Bài 4	Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A',B',C' là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C. Một đường tròn qua B',C' tiếp xúc với cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của (O) tại A_1. Các điểm B_1,C_1 xác định tương tự.	5
	a) Chứng minh $\dfrac{A_1B}{A_1C}=\sqrt{\dfrac{\cot B}{\cot C}}$.	2
	Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.  a) Các đường tròn $(A_1B'C'),(O),(BCB'C')$ có các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn đồng quy tại tâm đẳng phương P $\Rightarrow$ PA_1 là tiếp tuyến chung của đường tròn $(A_1B'C'),(O)$ $\Rightarrow$ tam giác PA_1B đồng dạng tam giác PCA_1 $\Rightarrow \dfrac{A_1B}{A_1C}=\dfrac{PB}{PA_1}=\dfrac{PA_1}{PC}=\sqrt{\dfrac{PB}{PC}}$. Chú ý (PA'BC)=-1, ta được $\sqrt{\dfrac{PB}{PC}}=\sqrt{\dfrac{A'B}{A'C}}=\sqrt{\dfrac{\cot B}{\cot C}}$. Vậy $\dfrac{A_1B}{A_1C}=\sqrt{\dfrac{\cot B}{\cot C}}$.	2
	b) Vẽ các hình bình hành B_1ABX, C_1ACY. Chứng minh $A_1\in(XYA_0)$ với AA_0 là đường kính của (O).	2
	Tương tự câu a) ta được $\dfrac{B_1C}{B_1A}=\sqrt{\dfrac{\cot C}{\cot A}}$, $\dfrac{C_1A}{C_1B}=\sqrt{\dfrac{\cot A}{\cot B}}\Rightarrow\dfrac{A_1B}{A_1C}.\dfrac{B_1C}{B_1A}.\dfrac{C_1A}{C_1B}=1$. $\Rightarrow\dfrac{\sin\left(\widehat{BAA_1}\right)}{\sin\left(\widehat{A_1AC}\right)}.\dfrac{\sin\left(\widehat{CBB_1}\right)}{\sin\left(\widehat{B_1BA}\right)}.\dfrac{\sin\left(\widehat{ACC_1}\right)}{\sin\left(\widehat{C_1CB}\right)}=1$. Theo định lý Ceva sin ta có AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại T.	2

	Gọi X' là trung điểm AX. Do AB_1XB là hình bình hành nên X' là trung điểm BB_1. Suy ra $\widehat{OX'T}=90^0$. Gọi Y',T' là trung điểm AY, AA_1. Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{OT'T}=\widehat{OY'T}=90^0$ Suy ra X',Y',T' thuộc đường tròn đường kính OT. Suy ra $O\in(X'Y'T')$. Xét phép vị tự tâm A tỉ số 2: $X'\mapsto X$ $Y'\mapsto Y$ $T'\mapsto A_1$ $O\mapsto A_0$ Do X',Y',T',O đồng viên nên X,Y,A_1,A_0 đồng viên. Vậy $A_0\in(XYA_1)$.	
	c) Vẽ các hình bình hành $BA_1CA_2, CB_1AB_2, AC_1BC_2$. Chứng minh $(A_2B_2C_2)$ đi qua trực tâm của tam giác ABC.	1
	Do $\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{AC_1}$ (C_1ACY là hình bình hành) và $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{C_2B}$ (AC_1BC_2 là hình bình hành) nên $\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{C_2B}$ nên C_2 đối xứng Y qua trung điểm BC. Tương tự B_2 đối xứng X qua trung điểm BC. Do trực tâm H của tam giác ABC đối xứng A_0 qua trung điểm BC. Gọi I là trung điểm BC. Xét phép đối xứng tâm I. $Y\mapsto C_2$ $X\mapsto B_2$ $A_1\mapsto A_2$ $A_0\mapsto H$ Theo câu b ta có X,Y,A_1,A_0 đồng viên nên H,A_2,B_2,C_2 đồng viên Vậy $H\in(A_2B_2C_2)$.	1

Bài 5	Bộ hai số nguyên khác không (x,y) được gọi là "bộ số đẹp" nếu x là số lẻ, y là số chẵn, x,y nguyên tố cùng nhau và x^2+y^2 là số chính phương.	**4**
	a) Chứng minh rằng (x,y) là "bộ số đẹp" khi và chỉ khi tồn tại 2 số nguyên u,v khác 0 và khác tính chẵn lẻ, nguyên tố cùng nhau sao cho $(x,y)=(u^2-v^2,2uv)$.	1,5
	Nhận xét nếu cặp (x,y) là cặp số đẹp thì tồn tại số nguyên dương z sao cho $$x^2+y^2=z^2$$ Có z là số lẻ và nguyên tố cùng nhau với x và y (do (x, y) = 1). Giả sử $x,y>0$, x là số lẻ và $y=2t$ là số chẵn. Ta có $x^2+4t^2=z^2 \Leftrightarrow 4t^2=(z-x)(z+x)$	0,5
	Ta có z – x, z + x là hai số cùng chẵn suy ra tồn tại hai số nguyên m, n sao cho $$z+x=2m, z-x=2n \text{ và } m.n=t^2.$$ $\Rightarrow \begin{cases} z=m+n \\ x=m-n \end{cases}$.	0.5
	Do (z, x) = 1 nên (m, n) = 1. Mà $m.n=t^2$ nên tồn tại hai số nguyên u, v nguyên tố cùng nhau sao cho $m=u^2$, $n=v^2$ và $u.v=t$. Vậy $x=u^2-v^2, y=2uv$.	0.5
	b) Với mỗi "bộ số đẹp" (x,y) ta có thể tạo ra 1 "bộ số đẹp" mới bởi 1 trong 2 phép biến đổi: hoặc đổi dấu của 1 trong 2 số hoặc cộng 1 số nguyên *k* nào đó vào cả 2 số sao cho $(x+k,y+k)$ là "bộ số đẹp". Chứng minh rằng với bất kỳ 2 bộ số đẹp (x,y) và (z,t) cho trước ta luôn có thể biến đổi từ (x,y) thành (z,t) sau hữu hạn các bước biến đổi như trên.	2,5
	Ta thực hiện biến đổi: Bước 1: Biến đổi (x,y) thành (x_0,y_0) với $x_0,y_0>0$. Bước 2: Với bộ (x_0,y_0) ở trên, ta có hai số u,v tương ứng ($u>v$) thỏa mãn $x_0=u^2-v^2>0, y_0=2uv$. Nếu $u\neq 2v$ thì ta biến đổi bằng cách cộng vào 2 số x_0,y_0 một số $-4uv+4v^2$, ta được $u^2-v^2-4uv+4v^2=(2v-u)^2-v^2$, $2uv-4uv+4v^2=2v(2v-u)$. Khi đó ta đã biến đổi bộ $(u^2-v^2;2uv)$ thành $((2v-u)^2-v^2,2v(2v-u))$. Ta có $u>\|2v-u\|$. Suy ra quá trình trên phải kết thúc sau một số phép biến đổi. Khi đó ta có $u=2v$. Vì $(u,v)=1\Rightarrow(2v,v)=1\Rightarrow v=1\Rightarrow u=2$. Do vậy mọi "bộ số đẹp" có thể biến đổi về (3,4) và ngược lại, đpcm.	2,5