SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẾN TRE

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể phát đề)

Câu 1 (5 điểm)

Giả sử α, β là các nghiệm thực của phương trình $4x^2 \quad 4tx \quad 1 = 0$ ($t \in \quad$) và $[\alpha;\ \beta]$ là tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{2x - t}{x^2+1}$.

a) Đặt $g(t) = maxf(x) \quad minf(x)$. Tìm $g(t)$ theo t.

b) Chứng minh rằng: Với $u_1, u_2, u_3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nếu $sinu_1 + sin\, u_2 + \ sinu_3 = 1$ thì $\frac{1}{g(tanu_1)} + \frac{1}{g(tanu_2)} + \frac{1}{g(tanu_3)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 2 (5 điểm)

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0, AB > AC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là giao điểm hai đường cao BE và CF ($E \in AC, F \ \in AB$). Trên các cạnh BH, HF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Tính giá trị của $\frac{MH+NH}{OH}$.

Câu 3 (5 điểm)

Dịp hè năm học 2017 – 2018, hiệu trưởng trường A tổ chức cho 3n (n là số nguyên dương) học sinh tham gia cắm trại. Mỗi ngày, hiệu trưởng phân công 3 học sinh làm vệ sinh khu vực cắm trại. Khi đợt cắm trại kết thúc, hiệu trưởng nhận thấy rằng: với 2 học sinh bất kỳ có đúng một lần được phân công làm vệ sinh trong cùng một ngày.

a) Khi $n = 3$, hãy tìm số cách sắp xếp học sinh thỏa yêu cầu trên. Giải thích.

b) Chứng minh rằng n là số lẻ.

Câu 4 (5 điểm)

Xác định tất cả các hàm $f\colon \quad \rightarrow \quad$ và $g\colon \quad \rightarrow \quad$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(1) Với mọi $x, y \in \quad$: $2f(x) \quad g(x) = f(y) \quad y$;

(2) Với mọi $x \in \quad$: $f(x).g(x) \geq x + 1$.

HẾT

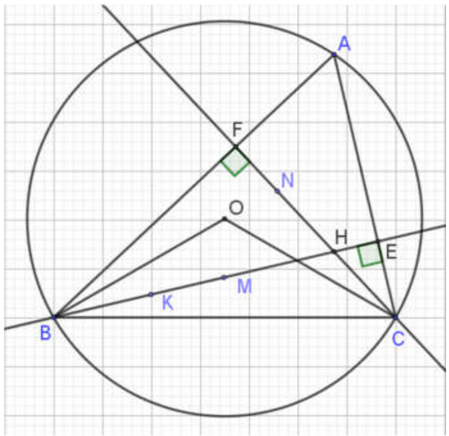
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẾN TRE

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: TOÁN

+ *Hướng dẫn chung: (nếu có)*

……………………………………………………………………………………………………

Câu	**Nội dung**	**Điểm**	**Ghi chú**
1	Giải sử α, β là các nghiệm thực của phương trình $4x^2 \quad 4tx \quad 1 = 0$ $(t \in \quad)$ và $[\alpha;\ \beta]$ là tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$. a) Đặt $g(t) = maxf(x) \quad minf(x)$. Tìm $g(t)$ theo t. b) Chứng minh rằng: Với $u_1, u_2, u_3 \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, nếu $sinu_1 + sin\,u_2 + \ sinu_3 = 1$ thì $\frac{1}{g(tanu_1)} + \frac{1}{g(tanu_2)} + \frac{1}{g(tanu_3)} < \frac{3\sqrt{6}}{4}$.	**5**	
1a)	Đặt $\alpha \le x_1 < x_2 \le \beta$ khi đó $4x_1^2 - 4tx_1 - 1 \le 0, 4x_2^2 - 4tx_2 - 1 \le 0$ Do đó: $4(x_1^2 + x_1^2) - 4t(x_1 + x_2) - 2 \le 0 \Leftrightarrow 2x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} < 0$	1	
	Vì $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2 - t}{x_2^2 + 1} - \frac{2x_1 - t}{x_1^2 + 1} = \frac{(x_2 - x_1)\left[t(x_2 + x_1) - 2x_1x_2 + 2\right]}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)}$ Và $t(x_2 + x_1) - 2x_1x_2 + 2 > t(x_2 + x_1) - 2x_1x_2 + \frac{1}{2} > 0$ vì vậy $f(x_2) - f(x_1) > 0$ nên $f(x)$ là một hàm tăng trên $\left[\alpha;\beta\right]$	1	
	Vì $\alpha + \beta = t$ và $\alpha\beta = \frac{-1}{4}$ $g(t) = m\text{axf(x)-minf(x)=f}(\beta)\text{-f}(\alpha) = \frac{\sqrt{t^2+1}(t^2 + \frac{5}{2})}{t^2 + \frac{25}{16}} = \frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}$	1	
1b)	$g(\tan u_i) = \frac{\frac{8}{\text{cosu}_i}(\frac{2}{\cos^2 u_i} + 3)}{\frac{16}{\cos^2 u_i} + 9} = \frac{\frac{16}{\text{cosu}_i} + 24\text{cosu}_i}{16 + 9\cos^2 u_i}$	1	
	$g(\tan u_i) \ge \frac{2\sqrt{16.24}}{16 + 9\cos^2 u_i} = \frac{16\sqrt{6}}{16 + 9\cos^2 u_i} (i = 1,2,3)$ Vì thế		

	$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{g(\tan u_i)} \le \frac{1}{16\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{3}(16+9\cos^2 u_i) = \frac{1}{16\sqrt{6}}(16.3+9.3-9\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i)$		
	Vì $\sum_{i=1}^{3}\sin u_i = 1$ với $u_i \in (0;\frac{\pi}{2}), i=1,2,3$ ta có $3\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i > (\sum_{i=1}^{3}\sin u_i)^2 = 1$ Vì vậy $\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{1}{16\sqrt{6}}(75-9.\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}\sqrt{6}$	1	
2	Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0, AB > AC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là giao điểm hai đường cao BE và CF $(E \in AC, F \in AB)$. Trên các cạnh BH, HF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Tính giá trị của $\frac{MH+NH}{OH}$.	**5**	
			
	Trên đoạn BE lấy điểm K sao cho: BK = CH Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\widehat{BOC} = 2\hat{A} = 120^0$. Ta có $\widehat{BHC} = 180^0 \quad \hat{A} = 120^0$ nên $\widehat{BHC} = \widehat{BOC}$ suy ra bốn điểm B, C, O, H cùng thuộc một đường tròn → $\widehat{OBH} = \widehat{OCH}$.	2	
	Xét 2 tam giác BOK và COH có OB = OC, BK = CH và $\widehat{OBH} = \widehat{OCH}$ nên $BOK = \quad COH$ suy ra $\widehat{BOK} = \widehat{COH}$ và $OK = OH$ Ta có $\widehat{KOH} = \widehat{BOC} = 120^0, \widehat{OKH} = \widehat{OHK} = 30^0$	2	
	Áp dụng định lý sin cho tam giác OKH, ta có $KH = \sqrt{3}OH$ Ta có $\frac{MH+NH}{OH} = \frac{MH+KM}{OH} = \frac{KH}{OH} = \sqrt{3}$.	1	
3	Dịp hè năm học 2017 – 2018, hiệu trưởng trường A tổ chức cho 3n (n là số nguyên dương) học sinh tham gia cắm trại. Mỗi ngày, hiệu trưởng phân công 3 học sinh làm vệ sinh khu vực cắm trại. Khi đợt cắm trại kết thúc, hiệu trưởng nhận thấy rằng: với 2 học sinh bất kỳ có đúng một lần được phân công làm vệ sinh trong cùng một ngày. a) Khi $n = 3$, hãy tìm số cách sắp xếp học sinh thỏa yêu cầu trên. Giải thích. b) Chứng minh rằng n là số lẻ.	**5**	

a)	Khi $n = 3$: có 9 học sinh mang số từ 1 đến 9. Số các sắp xếp học sinh làm vệ sinh thỏa yêu cầu là 12. Cụ thể là: $(1,2,3), (1,4,5), (1,6,7), (1,8,9), (2,4,6), (2,7,8),$ $(2,5,9), (3,4,8), (3,5,7), (3,6,9), (4,7,9), (5,6,8).$	3	
b)	Ta lấy cố định một học sinh A. Vì học sinh A được phân công vệ sinh đúng một lần với mỗi học sinh khác và mỗi ngày có 3 học sinh làm vệ sinh nên $3n$ 1 học sinh còn lại được chia thành từng cặp, ta có ($3n$ 1) 2 nên n là số lẻ	2	
4	Xác định tất cả các hàm f: → và g: → thoả mãn đồng thời các điều kiện: (1) Với mọi $x, y \in$: $2f(x)$ $g(x) = f(y)$ y; (2) Với mọi $x \in$: $f(x).g(x) \geq x + 1$.	**5**	
	Từ 1) thay $x = y$ ta có $2f(x) - g(x) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = g(x) - x \ \forall x \in \mathbb{R}.$ Như vậy giả thiết 1) trở thành : $2(g(x) - x) - g(x) = (g(y) - y) - y \Rightarrow g(x) = 2x - 2y + g(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$	1.5	
	Thay y = 0 và đặt g(0) = b ta có $g(x) = 2x + b$, do đó $f(x) = x + b.$ Thay biểu thức của f và g vào bất đẳng thức ở 2) ta được : $(x + b)(2x + b) \geq x + 1 \ \forall x \Leftrightarrow 2x^2 + (3b - 1)x + b^2 - 1 \geq 0 \ \ \forall x.$ (*)	1	
	Bất đẳng thức (*) được thoả mãn với mọi x khi và chỉ khi $\Delta = (3b - 1)^2 - 4.2(b^2 - 1) = b^2 - 6b + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (b - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow b = 3.$ Hiển nhiên các hàm $f(x) = x + 3$; $g(x) = 2x + 3$ thoả mãn điều kiện 2).	1	
	Ta chứng minh chúng cũng thoả mãn điều kiện 1) Thật vậy, ta có $2f(x) - g(x) = 2(x + 3) - (2x + 3) = 3$ và $f(y) - y = y + 3 - y = 3.$ Vậy 1) được thoả mãn	1	
	Kết luận : Tất cả các cặp hàm số f và g cần tìm là $f(x) = x + 3 \ ; g(x) = 2x + 3.$	0.5	