SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÀO CAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2018 – 2019

***Môn: Toán* - THPT**

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. **(5,0 điểm).**

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13\end{cases}$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}.$$

Câu 2. **(4,0 điểm).**

a) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2018}\left(e^{2x}-e^x+\frac{1}{3}\right)(x^2-2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=50$, trong đó x_1,x_2,x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2},u_2=3\\ u_{n+2}=\frac{u_{n+1}.u_n+1}{u_{n+1}+u_n},\forall n\ge 1\end{cases}$.

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. **(3,0 điểm).**

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $CD=2AD=2AB$. Gọi $M(2;4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB=3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M. Phương trình đường thẳng MN là $2x+y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d:x+y=0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d':3x+y-8=0$

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $ABM=MBI$ và MN vuông góc với BI. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

Câu 4. **(3,0 điểm).**Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $15^x+y^2=2^z$.

Câu 5. **(3,0 điểm).**Tính tổng $S=\frac{1}{2019}{C_{2019}^{1}}^{2}+\frac{2}{2018}{C_{2019}^{2}}^{2}+...+\frac{2018}{2}{C_{2019}^{2018}}^{2}+\frac{2019}{1}{C_{2019}^{2019}}^{2}$.

Hết

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13\end{cases}$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}.$$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases}5-x\ge 0\\ 4-y\ge 0\\ 2x+y+5\ge 0\\ 3x+2y+11\ge 0\end{cases}$.

Đặt $\sqrt{5-x}=a\ge 0$; $\sqrt{4-y}=b\ge 0$,

phương trình $(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0$ trở thành:

$\left[17-3\left(5-a^2\right)\right].a+\left[3\left(4-b^2\right)-14\right]=0\Leftrightarrow\left(3a^2+2\right).a=\left(3b^2+2\right).b\Leftrightarrow 3a^3+2a=3b^3+2b$ (*).

Xét hàm số $y=f(t)=3t^3+2t$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2>0$, $\forall t\in[0;+\infty)$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Vì thế với $a\ge 0$, $b\ge 0$ thì $3a^3+2a=3b^3+2b\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra $\sqrt{5-x}=\sqrt{4-y}\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình:

$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13$.

Điều kiện: $x\in\left[-\frac{4}{3};5\right]$.

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3x+4}-2\right)+\left(3\sqrt{5x+9}-6\right)=x^2+6x+5$

$$\Leftrightarrow\frac{4(3x+4)-4}{2\sqrt{3x+4}+2}+\frac{9(5x+9)-36}{3\sqrt{5x+9}+6}=(x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1}+\frac{15(x+1)}{\sqrt{5x+9}+2}=(x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}=x+5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}=x+5\ (**)\end{array}\right..$$

Phương trình (**) tương đương với $\dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}-x=5$.

Đặt $g(x)=\dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}-x$, $x\in\left[-\frac{4}{3};5\right]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{-6.\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\left(\sqrt{3x+4}+1\right)^2}+\dfrac{-15.\dfrac{5}{2\sqrt{5x+9}}}{\left(\sqrt{5x+9}+2\right)^2}-1$

$=\dfrac{-9}{\left(\sqrt{3x+4}+1\right)^2.\sqrt{3x+4}}+\dfrac{-75}{2\left(\sqrt{5x+9}+2\right)^2.\sqrt{5x+9}}-1<0$, $\forall x\in\left(-\dfrac{4}{3};5\right)$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\left[-\dfrac{4}{3};5\right]$.

Vì thế phương trình $g(x)=5$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-\dfrac{4}{3};5\right]$.

Ta lại có $x=0$ là nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất.

Với $x=-1$ thì $y=-2$.

Với $x=0$ thì $y=-1$.

So sánh điều kiện, hệ đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(-1;-2)$; $(0;-1)$.

b)

Ta có $\dfrac{a^2+bc}{b+c}+a=\dfrac{a^2+bc+ab+ac}{b+c}=\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}\Rightarrow\dfrac{a^2+bc}{b+c}=\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}-a$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2+ca}{c+a}=\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}-b;\dfrac{c^2+ab}{a+b}=\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}-c$.

$\Rightarrow P=\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}-(a+b+c)-4\sqrt[4]{a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}\ge 2(a+b)$

$\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(b+c)$

$\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}+\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}\ge 2(c+a)$

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}\right)\ge 4(a+b+c)$

$\Rightarrow P\ge a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}$.

Đặt $t=\sqrt[4]{a+b+c}>0\Rightarrow a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}=t^4-4t$.

Ta có $t^4-4t=t^4-2t^2+1+2\left(t^2-2t+1\right)-3=\left(t^2-1\right)^2+2(t-1)^2-3\ge -3\Rightarrow P\ge -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi $\begin{cases}a+b+c=1\\a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 2. a) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-3\right)^{2018}\left(e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-2x\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=50$, trong đó x_1,x_2,x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

b) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định như sau: $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2}, u_2=3 \\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n+1}{u_{n+1}+u_n}, \forall n\geq 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\left(u_n\right)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

a) Cách 1

$$f'\left(x\right)=\left(x-3\right)^{2018}\left(e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-2x\right),\qquad f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Trong đó $x=3$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm $y=f\left(x^2-8x+m\right)$ có $y'=\left(2x-8\right)f'\left(x^2-8x+m\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=3 \\ x^2-8x+m=2 \\ x^2-8x+m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x=3-m & (1) \\ x^2-8x=2-m & (2) \\ x^2-8x=-m & (3) \end{array}\right.$$

Ta xét hàm $g\left(x\right)=x^2-8x$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Nếu $3-m<-16\Leftrightarrow m>19$**:**

Phương trình (1), (2), (3) đều vô nghiệm. Hàm số đã cho chỉ có 1 cực trị.

Nếu $2-m\leq -16<3-m\Leftrightarrow 18\leq m<19$:

Phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép và phương trình (3) vô nghiệm. Hàm đã cho có 1 cực trị.

Do đó không thỏa điều kiện có 3 cực trị.

Nếu $-m\leq -16<2-m\Leftrightarrow 16\leq m<18$:

Phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm bội lẻ và phương trình (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Do đó thỏa điều kiện có 3 cực trị.

Khi đó giả sử $x_1=4$, ta có x_2,x_3 là hai nghiệm của phương trình 2 thỏa mãn điều kiện:

$x_2{}^2+x_3{}^2=34\Leftrightarrow \left(x_2+x_3\right)^2-2x_1x_2=34$.

Áp dụng định lý Viét ta có: $64-2\left(m-2\right)=34\Leftrightarrow m=17$ Thỏa điều kiện.

Nếu $-m>-16 \Leftrightarrow m<16$: Phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn, phương trình (3) có 5 nghiệm đơn. Do đó không thỏa điều kiện có 3 cực trị.

Vậy với $m=17$ thì điều kiện bài toán thỏa.

Cách 2

Xét hàm $y=f\left(x^2-8x+m\right)$ có

$$y'=(2x-8)f'\left(x^2-8x+m\right)$$

$$=(2x-8)\left(x^2-8x+m-3\right)^{2018}\left(e^{2x^2-8x+m}-e^{x^2-8x+m}+\frac{1}{3}\right)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right].$$

Dấu y' phụ thuộc vào dấu của $(2x-8)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right]$

Ta có:

$$(2x-8)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=0 \\ x^2-8x+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x=-m \\ x^2-8x=2-m \end{array}\right.$$

Ta xét hàm $g(x)=x^2-8x$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi: $-m \le -16 < 2-m \Leftrightarrow 16 \le m < 18$.

Khi đó giả sử $x_1=4$, ta có x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình 2 thỏa mãn điều kiện:

$x_2{}^2+x_3{}^2=34 \Leftrightarrow \left(x_2+x_3\right)^2-2x_1x_2=34.$

Áp dụng định lý Viét ta có: $64-2(m-2)=34 \Leftrightarrow m=17$ .Thỏa điều kiện.

b) Theo giả thuyết ta có $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n+1}{u_{n+1}+u_n} \Leftrightarrow u_{n+2}-1=\dfrac{\left(u_{n+1}-1\right)\left(u_n-1\right)}{u_{n+1}+u_n}$

$$u_{n+2}=\frac{u_{n+1}.u_n+1}{u_{n+1}+u_n} \Leftrightarrow u_{n+2}+1=\frac{\left(u_{n+1}+1\right)\left(u_n+1\right)}{u_{n+1}+u_n}$$

Vì $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2}>0 \\ u_2=3>0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n+1}{u_{n+1}+u_n}>0, \forall n \ge 1$.

Suy ra $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_{n+2}+1}=\dfrac{\left(u_{n+1}-1\right)\left(u_n-1\right)}{\left(u_{n+1}+1\right)\left(u_n+1\right)_n}$.

Đặt $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1} \Rightarrow v_{n+2}=v_{n+1}.v_n \Rightarrow \left|v_{n+2}\right|=\left|v_{n+1}\right|.\left|v_n\right|$.

Đặt $x_n=\ln\left|v_n\right|$ suy ra $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$.

Ta có phương trình đặc trưng: $t^2-t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{3} \\ v_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\ln 3 \\ x_2 = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = -\ln 3 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta = -\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx -0,38 < 0 \\ \beta \approx 0,78 \end{cases}$.

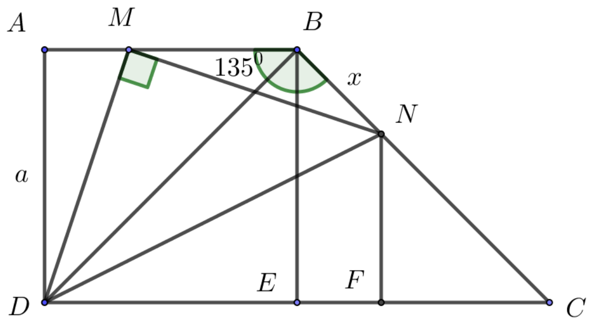
Vì $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > 1, \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ nên $\lim x_n = \lim\left(\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = -\infty$.

Suy ra $\lim|v_n| = 0 \Rightarrow \lim\left|\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right| = 0 \Rightarrow \lim u_n = 1$.

Vậy rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và giới hạn đó bằng 1.

Câu 3. a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $CD = 2AD = 2AB$. Gọi $M(2;4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M. Phương trình đường thẳng MN là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$

Lời giải



+) Đặt $BN = x$, $AB = a \Rightarrow MA = MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Xét ΔBMN có $MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2.MB.NB.\cos MBN \Leftrightarrow \frac{10a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} + x^2 - 2.x.\frac{2a}{3}.\cos 135°$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2\sqrt{2}ax}{3} - \frac{2a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B, kẻ NF vuông góc với DC. Ta có $\frac{NF}{BE} = \frac{CN}{CB} = \frac{CF}{CE}$

$$\Leftrightarrow \frac{NF}{a} = \frac{2}{3} = \frac{CF}{a} \Leftrightarrow NF = CF = \frac{2a}{3} \Rightarrow DN = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}.$$

Nhận thấy $MD^2 + MN^2 = \frac{10a^2}{9} + \frac{10a^2}{9} = \frac{20a^2}{9} = DN^2$. Suy ra ΔDMN vuông tại M.

+) Vì D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ nên $D(d; -d) \Rightarrow \overrightarrow{MD} = (d - 2; -d - 4)$.

Phương trình đường thẳng MN $2x+y-8=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}.\vec{u}=0 \Rightarrow d=-2 \Rightarrow D(-2;2)$.

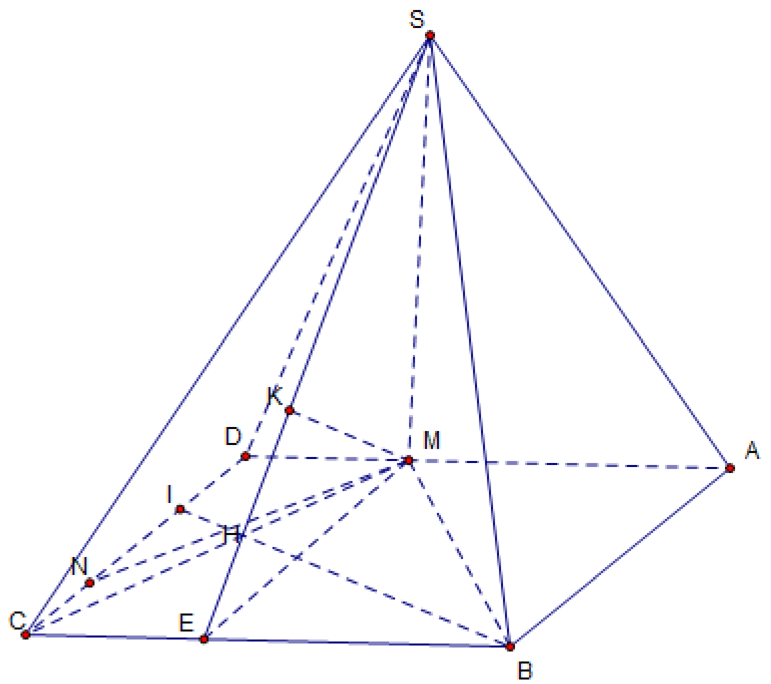
+) Điểm A thuộc đường thẳng $d':3x+y-8=0$ nên $A(a;-3a+8)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{DA}=(a+2;-3a+6), \overrightarrow{MA}=(a-2;-3a+4) \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MA}=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$

*) *Trường hợp 1:* $a=1 \Rightarrow A(1;5)$

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $ABM=MBI$ và MN vuông góc với BI. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



*) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$

Ta có $DM=\dfrac{AD}{3}=\dfrac{a}{3}, AM=\dfrac{2a}{3} \Rightarrow CM=\sqrt{DM^2+CD^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

$SM \perp (ABCD) \Rightarrow SCM=60° \Rightarrow SM=CM\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{30}}{3}$.

Khi đó $S_{AMCB}=\dfrac{(AM+BC)AB}{2}=\dfrac{5a^2}{6}$.

Thể tích khối chóp $S.AMCB$ là $V=\dfrac{1}{3}SM.S_{AMCB}=\dfrac{5a^3\sqrt{30}}{54}$.

*) Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

Ta có $BM=\dfrac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos ABM=\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\cos IBM$.

Đặt $DI = x \Rightarrow IM^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{9}, IB^2 = (a-x)^2 + a^2$.

Áp dụng định lí cosin ta có $IM^2 = MB^2 + IB^2 - 2.MB.IB.\cos IBM$

$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{a^2}{9} = (a-x)^2 + a^2 + \dfrac{13a^2}{9} - 2a.\sqrt{(a-x)^2 + a^2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7a}{12} \Rightarrow IB = \dfrac{13a}{12}$.

Gọi $H = MN \cap BI$. Ta có $\Delta ABM = \Delta MBH \Rightarrow BH = AB = a, IH = IB - BH = \dfrac{a}{12}$.

$\Delta CBI \sim \Delta HNI \Rightarrow \dfrac{BI}{NI} = \dfrac{CI}{HI} \Rightarrow NI = \dfrac{HI.BI}{CI} = \dfrac{13a}{60}, CN = CD - DI - IN = \dfrac{a}{5} \Rightarrow \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{1}{5}$

Suy ra $d\left(N,(SBC)\right) = \dfrac{1}{5}.d\left(D,(SBC)\right) = \dfrac{1}{5}.d\left(M,(SBC)\right)$.

Kẻ ME vuông góc với BC, kẻ MK vuông góc với SE. Suy ra $MK = .d\left(M,(SBC)\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{MK^2} = \dfrac{1}{MS^2} + \dfrac{1}{ME^2} = \dfrac{13}{10a^2} \Rightarrow MK = \dfrac{a\sqrt{130}}{13} \Rightarrow d\left(N,(SBC)\right) = \dfrac{1}{5}.d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{130}}{65}$.

Câu 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $15^x + y^2 = 2^z$.

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán thì $2^z \ge 15 + 1 = 2^4 \Rightarrow z \ge 4$.

Khi đó vế phải của phương trình đã cho chia hết cho 16.

Do đó y phải là số lẻ. Từ đó ta được:

$$\begin{cases} y^2 \equiv 1 \pmod 8 \\ 15^x \equiv (-1)^x \pmod 8 \end{cases} \Rightarrow 15^x + y^2 \equiv (-1)^x + 1 \pmod 8.$$

Vì vậy ta cũng suy ra được x là số lẻ.

Ta lại lập luận tiếp để kết luận z phải là số chẵn bằng phản chứng như sau:

Nếu z là số lẻ thì $2^z = 2^{2n+1} = 2(3+1)^n \equiv 2 \pmod 3$ và y^2 không thể chia 3 dư 2 nên ta có mâu thuẫn. Vì khi đó $2^z - y^2$ không thể chia hết cho 3.

Vậy tới đây ta tiếp tục tìm nghiệm của phương trình đã cho với giả thiết là x, y đều lẻ, còn z là số chẵn.

Ta có $15^x + y^2 = 2^z \Leftrightarrow 15^x = (2^t - y)(2^t + y)$. Với $t \ge 2$ là số nguyên thoả mãn $z = 2t$.

Ta nhận xét rằng

$(2^t - y) + (2^t + y) = 2.2^t$. Do đó $(2^t - y)$ và $(2^t + y)$ không thể cùng chia hết cho 3 hoặc 5.

$$\text{Vì vậy } 15^x = (2^t - y)(2^t + y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^t - y = 3^x \\ 2^t + y = 5^x \end{cases} \\ \begin{cases} 2^t - y = 1 \\ 2^t + y = 15^x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{t+1} = 5^x + 3^x \\ y = \dfrac{5^x - 3^x}{2} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 2^{t+1} = 1 + 15^x \\ y = \dfrac{15^x - 1}{2} \end{cases} (2) \end{array}\right..$$

Nếu $x=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\t=2\end{cases}\\\begin{cases}y=7\\t=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\\z=4\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=7\\z=6\end{cases}\end{array}\right.$.

Nếu $x=2n+3, n\geq 0$ thì từ $2^t=\dfrac{5^x+3^x}{2}\geq 76 \Rightarrow t\geq 6 \Rightarrow 2^t\equiv 0\pmod{16}$. Ta có

$3^x=27(3)^{2n}=27(4-1)^{2n}\equiv 13\pmod{16}$; $5^x=125.(4+1)^{2n}\equiv 13\pmod{16}$

Khi đó $3^x+5^x\equiv 26\pmod{16}$, ta kết luận (1) vô nghiệm.

Tương tự như thế, nếu $x=2n+3, n\geq 0$ thì từ $2^t=\dfrac{1+15^x}{2}\geq 1688 \Rightarrow t\geq 10 \Rightarrow 2^t\equiv 0\pmod{32}$.

Ta có

$15^x=(16-1)^{2n+3}\equiv 16(2n+3)-1\pmod{32}$

Khi đó $1+15^x\equiv 16(2n+3)\pmod{32}$, ta kết luận (2) vô nghiệm.

Câu 5. Tính tổng $S=\dfrac{1}{2019}\left(C_{2019}^{1}\right)^2+\dfrac{2}{2018}\left(C_{2019}^{2}\right)^2+...+\dfrac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^2+\dfrac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^2$.

Lời giải

Xét số hạng tổng quát:

$$T_k=\frac{k}{2020-k}.\left(C_{2019}^{k}\right)^2=\frac{k}{2020-k}.\frac{2019!}{(2019-k)!k!}.C_{2019}^{k}=\frac{2019!}{(2020-k)!(k-1)!}.C_{2019}^{k}$$

$$=C_{2019}^{k-1}.C_{2019}^{2019-k}, \forall k=1;2;...;2019$$

Suy ra $S=C_{2019}^{0}.C_{2019}^{2018}+C_{2019}^{1}.C_{2019}^{2017}+...+C_{2019}^{2017}.C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2018}.C_{2019}^{0}$

Xét khai triển:

$(1+x)^{2019}.(1+x)^{2019}=\left(C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}x+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}\right)\left(C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}x+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}\right)$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{2019}.(1+x)^{2019}$ là:

$C_{2019}^{0}.C_{2019}^{2018}+C_{2019}^{1}.C_{2019}^{2017}+...+C_{2019}^{2017}.C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2018}.C_{2019}^{0}$ (1)

Xét khai triển: $(1+x)^{4038}=C_{4038}^{0}+C_{4038}^{1}x+...+C_{4038}^{2018}x^{2018}+...+C_{4038}^{4038}x^{4038}$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{4038}$ là: C_{4038}^{2018} (2)

Từ (1) và (2) ta có $S=\dfrac{1}{2019}\left(C_{2019}^{1}\right)^2+\dfrac{2}{2018}\left(C_{2019}^{2}\right)^2+...+\dfrac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^2+\dfrac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^2=C_{4038}^{2018}$