SỞ GD & ĐT NGHỆ AN TRƯỜNG THPT CON CUÔNG	ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG KHỐI 10 NĂM HỌC 2017 – 2018 Môn : **TOÁN**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian phát đề*)

Câu 1.*(5,0 điểm)*

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 5x + m = 0$ (1) với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi m = 6.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} = 6$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$

Câu 3.*(5,0 điểm)*

a) Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}$

b) Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên đoạn thẳng AD sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tìm tỉ số $\dfrac{AD}{AK}$.

Câu 4. *(5,0 điểm).*

Trong mặt phẳng tọa độ 0xy cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2BC, D là trung điểm AB, E là điểm thuộc đoạn AC sao cho AC = 3EC, có phương trình $CD: x - 3y + 1 = 0$, $E\left(\dfrac{16}{3}; 1\right)$.

a) Chứng minh rằng BE là phân giác trong của góc B, Tìm tọa độ điểm I là giao của CD và BE.

b) Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết A có tung độ âm.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{1}{abc}$.

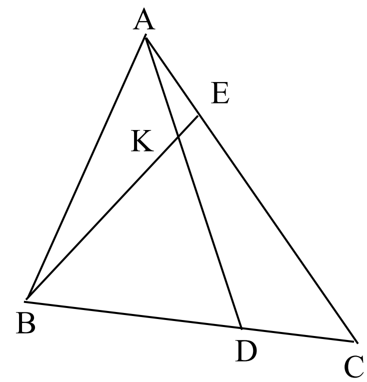
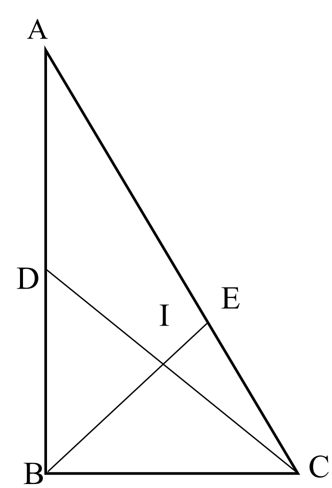
---- Hết ----

Họ tên thí sinh :.. Số báo danh :....................................

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1.	Phương trình $x^2-5x+m=0$	**5,0**
a)	Giải phương trình (1) khi $m=6$	**1,5**
	Khi $m=6$ PT (1) có dạng: $x^2-5x+6=0$	0,5
	Ta có: $\Delta^{'}=4+1=5>0$	0,5
	PT (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=2$ và $x_2=3$	0,5
b)	Tìm giá trị m thỏa mãn	**3,5**
	Lập $\Delta = 25 - 4m$ Phương trình có 2 nghiệm x_1,x_2 khi $\Delta\geq 0$ hay $m\leq\dfrac{25}{4}$	0,5
	Áp dụng hệ thức Viet, ta có $x_1+x_2=5;\ x_1x_2=m$ Hai nghiệm x_1,x_2 dương khi $\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}$ hay $m>0$.	0,5
	Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm dương x_1, x_2 là $0<m\leq\dfrac{25}{4}$ (*)	0,5
	Ta có: $\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1.x_2}=5+2\sqrt{m}$ Suy ra $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{5+2\sqrt{m}}$ Ta có $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}=6\Leftrightarrow\sqrt{x_1.x_2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)=6$ Hay $\sqrt{m}\sqrt{5+2\sqrt{m}}=6\Leftrightarrow 2m\sqrt{m}+5m-36=0$ (1)	0,5
	Đặt $t=\sqrt{m}\geq 0$, khi đó (1) thành: $\Leftrightarrow 2t^3+5t^2-36=0$ $\Leftrightarrow (t-2)(2t^2+9t+18)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow t-2=0$ hoặc $2t^2+9t+18=0$ Với $t-2=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow m=4$ (thoả mãn (*)). Với $2t^2+9t+18=0$: phương trình vô nghiệm.	0,5
	Vậy với m = 4 thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 thoả mãn	0,5

	$x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} = 6$.	
2.	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$	**3,0**
	Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ \left(x^2 - y\right)^2 + xy = 1 \end{cases}$	1,0
	Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases}$ (*)	0,5
	Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$ Từ đó tìm ra $(a;\, b) \in \{(0;\, 1);\, (1;\, 0);\, (-2; -3)\}$	0,5
	Với $(a;\, b) = (0;\, 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. Với $(a;\, b) = (1;\, 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0)$.	0,5
	Với $(a;\, b) = (-2; -3)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1;\ y = 3$. Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1;\, 1); (0; -1); (1;\, 0); (-1;\, 0); (-1;\, 3)\}$.	0,5
3.		**5,0**
a)	Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}$	**2,5**
	$P = \dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha} = \dfrac{(4\sin\alpha - \cos\alpha)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}$	1.0
	$= \dfrac{4\sin^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos^2\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}$	0,5
	$= \dfrac{4\tan^3\alpha - \tan^2\alpha + 4\tan\alpha - 1}{\tan^3\alpha + 2}$	0,5
	$= \dfrac{4.8 - 4 + 4.2 - 1}{8 + 2} = \dfrac{7}{2}$	0,5

b)	b) Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên đoạn thẳng AD sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tìm tỉ số $\frac{AD}{AK}$.	**2,5**
	Vì $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ (1) 	0,5
	Giả sử $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$ (1)	0,5
	Mà $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AK}=x.\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=\frac{2x}{3}\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$	0,5
	Do $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên $\frac{m}{4}-\frac{2x}{3}=0\ \&\ 1-x-\frac{3m}{4}=0$	0.5
	Từ đó suy ra $x=\frac{1}{3};m=\frac{8}{9}$. Vậy $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\frac{AD}{AK}=3$	0,5
4.	Trong mặt phẳng tọa độ 0xy cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2BC, D là trung điểm AB, E là điểm thuộc đoạn AC sao cho AC = 3EC, có phương trình $CD: x-3y+1=0$, $E\left(\frac{16}{3};1\right)$.	**5,0**
a)	Chứng minh rằng BE là phân giác trong của góc B, Tìm tọa độ điểm I là giao của CD và BE.	**2,5**
	Ta có $\frac{BA}{BC}=\frac{EA}{EC}=2\Rightarrow E$ là chân đường phân giác trong 	0,5

	Do BD = BC $\Rightarrow BE \perp CD \Rightarrow BE: 3x+y-17=0$	0,5
	$I = BE \cap CD \Rightarrow$ tọa độ điiểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y+1=0 \\ 3x+y-17=0 \end{cases}$	0,5
	Giải hệ phương trình $\Rightarrow I(5;2)$	1,0
b)	Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết A có tung độ âm.	**2,5**
	Đặt $BC = a > 0 \Rightarrow AB = 2a, AC = a\sqrt{5}, CE = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$	0,5
	Do $\widehat{CBE} = 45^0 \Rightarrow IB = IC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (1) Tam giác EIC vuông tại I $\Rightarrow IE^2 = EC^2 - IC^2 \Rightarrow IE = \dfrac{a}{3\sqrt{2}}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IE} \Rightarrow B(4;5)$	0,5
	Gọi $C(3c-1;c)$ từ $BC = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow c^2 - 4c + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=3 \end{array}\right.$	0,5
	Với $c=1 \Rightarrow C(2;1), A(12;1)$ (KTM) Với $c=3 \Rightarrow C(8;3), A(0;-3)$ (TM) Vậy $A(0;-3), B(4;5), C(8;3)$	0,5
5.	Cho $\text{a}, \text{b}, \text{c}$ là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{abc}$.	**2,0**
	Áp dụng BĐT AM- GM ta có $\text{ab}+\text{bc}+\text{ca} \ge 3\sqrt[3]{\text{a}^2\text{b}^2\text{c}^2}$ $1 = \text{a}+\text{b}+\text{c} \ge 3\sqrt[3]{\text{abc}} \Rightarrow \sqrt[3]{\text{abc}} \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{ab}+\text{bc}+\text{ca} \ge 3\sqrt[3]{\text{abc}}\ \sqrt[3]{\text{abc}} \ge 9\text{abc}$	0,5
	$\Rightarrow \text{P} \ge \dfrac{1}{\text{a}^2+\text{b}^2+\text{c}^2} + \dfrac{9}{\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}}$	0,5
	$\Rightarrow \text{P} \ge \dfrac{1}{\text{a}^2+\text{b}^2+\text{c}^2} + \dfrac{1}{\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}} + \dfrac{1}{\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}} + \dfrac{7}{\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}}$	0,5

	$\ge \dfrac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}+\dfrac{7}{\dfrac{(a+b+c)^2}{3}}=30$	
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30 khi chẳng hạn tại $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.	0,5