

Câu 1: (2 điểm) Thực hiện các phép tính.

a) $7\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - \sqrt{125} - 2\sqrt{45}$.

b) $\sqrt{144} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$.

c) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt[3]{64} - \sqrt{2}$.

d) $\frac{2}{\sqrt{5}+2} + \frac{2}{\sqrt{5}-2}$.

Câu 2: (2 điểm) Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{2x+1} = 5$

b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-7}$

c) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$

Câu 3: (2 điểm) Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{4-6\sqrt{x}}{x-1} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = A \cdot B$

Câu 4: (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A .

a) Giả sử khi $AB = 9\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$. Tính cạnh BC và các góc còn lại của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

b) Gọi H là hình chiếu của A trên BC ; E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Tính EF .

c) Chứng minh rằng: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

d) Gọi K là trung điểm của BC , biết AK cắt EF tại I . Chứng tỏ rằng AK vuông góc với EF .

Câu 5: (0,5 điểm).

Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x-2000} + \sqrt{y-2001} + \sqrt{z-2002} = \frac{1}{2}(x+y+z) - 3000.$$

♣HẾT♣

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 7\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - \sqrt{125} - 2\sqrt{45} \\ & = 7\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\ & = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt[3]{64} - \sqrt{2} \\ & = \sqrt{2} - 1 - 4 - \sqrt{2} \\ & = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt{144} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \\ & = 12 - 5 \cdot 2 \\ & = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{2}{\sqrt{5}+2} + \frac{2}{\sqrt{5}-2} \\ & = \frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ & = \frac{2\sqrt{5}-4+2\sqrt{5}+4}{1} \\ & = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu 2: a) $\sqrt{2x+1} = 5$. ĐK $x \geq \frac{-1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 12(TM)$$

Vậy $S = \{12\}$

b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-7}$. ĐK $x \geq \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow x-2 = 2x-7$$

$$\Leftrightarrow x = 5(TM)$$

Vậy $S = \{5\}$

c) $x+3\sqrt{x}-4=0$, $x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-4=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=1(TM)$$

Vậy $S = \{1\}$

d) $\sqrt{x^2-2x+1}=3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy $S = \{4; -2\}$

Câu 3: a) Thay $x=16$ vào biểu thức A

$$A = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}+5} = \frac{5}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{4-6\sqrt{x}}{x-1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{4-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3+4-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{c) } S = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+5} = 1 + \frac{-6}{\sqrt{x}+5}$$

$$\text{Có } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+5 \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x}+5} \geq \frac{-6}{5}$$

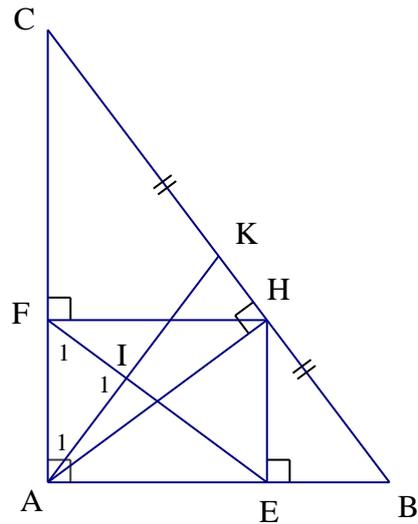
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{-6}{\sqrt{x}+5} \geq 1 + \frac{-6}{5}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{-1}{5}$$

Xảy ra dấu bằng khi $x=0$.

Vậy GTNN $S = \frac{-1}{5}$ khi $x=0$.

Câu 4:



a) Xét ΔABC vuông tại A có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (Định lí Pytago)}$$

$$\Leftrightarrow 9^2 + 12^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow BC = 15 \text{ cm.}$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} \approx 53^\circ$$

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ (Định lí)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} \approx 90^\circ - 53^\circ \approx 37^\circ$$

b) Xét tứ giác $AEHF$ có:

$$\widehat{AEH} = \widehat{EAF} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AH = EF \text{ (tính chất)}$$

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\Leftrightarrow AH \cdot 15 = 9 \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow AH = 7,2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow EF = 7,2 \text{ cm}$$

c) Xét ΔABH vuông tại H, đường cao HE có:

$$AE \cdot AB = AH^2 \text{ (hệ thức lượng)} \quad (1)$$

Xét ΔACH vuông tại H, đường cao HF có:

$$AF \cdot AC = AH^2 \text{ (hệ thức lượng)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (đpcm)

d) Ta có: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$ có:

\widehat{EAF} chung

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{B}$ (2 góc tương ứng)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có AK là đường trung tuyến

$\Rightarrow AK = KC$ (tính chất)

$\Rightarrow \triangle AKC$ cân tại K

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$ (tính chất)

Mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (định lí)

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{F_1} = 90^\circ$

Xét $\triangle AIF$ có: $\widehat{A_1} + \widehat{F_1} + \widehat{I_1} = 90^\circ$ (định lí tổng 3 góc trong một tam giác)

$\Rightarrow \widehat{I_1} = 90^\circ$

$\Rightarrow AK \perp EF$

Câu 5: $\sqrt{x-2000} + \sqrt{y-2001} + \sqrt{z-2002} = \frac{1}{2}(x+y+z) - 3000$ (*). (Điều kiện: $x \geq 2000$, $y \geq 2001$, $z \geq 2002$).

Do $x \geq 2000$, $y \geq 2001$, $z \geq 2002$ nên suy ra:
$$\begin{cases} x-2000 \geq 0 \\ y-2001 \geq 0 \\ z-2002 \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm ta được:

$$(x-2000)+1 \geq 2\sqrt{(x-2000).1} \Leftrightarrow x-1999 \geq 2\sqrt{x-2000} \quad (1).$$

$$(y-2001)+1 \geq 2\sqrt{(y-2001).1} \Leftrightarrow y-2000 \geq 2\sqrt{y-2001} \quad (2).$$

$$(z-2002)+1 \geq 2\sqrt{(z-2002).1} \Leftrightarrow z-2001 \geq 2\sqrt{z-2002} \quad (3).$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$x+y+z-6000 \geq 2\sqrt{x-2000} + 2\sqrt{y-2001} + 2\sqrt{z-2002}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y+z) - 3000 \geq \sqrt{x-2000} + \sqrt{y-2001} + \sqrt{z-2002} \quad (4).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x - 2000 = 1 \\ y - 2001 = 1 \\ z - 2002 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2001 (TM) \\ y = 2002 (TM) \\ z = 2003 (TM) \end{cases} (**).$

Từ (*), (4) và (**) suy ra (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2001 (TM) \\ y = 2002 (TM) \\ z = 2003 (TM) \end{cases}.$

Vậy phương trình (*) có nghiệm là: $(x; y; z) = (2001; 2002; 2003).$