

Câu 1 (3 điểm): Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 2}$.

Câu 2 (2 điểm):

a. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 2$, biết:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

b. Trong biểu thức xác định hàm $f(x)$ ở trên, cần thay số 5 bởi số bao nhiêu thì hàm số đó sẽ liên tục tại điểm $x_0 = 2$?

Câu 3 (3 điểm):

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh:

a) $BC \perp (OAH)$

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Câu 4 (1 điểm):

Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 5 (1 điểm):

Chứng minh rằng dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{4^n}$ có giới hạn 0.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN TOÁN 11 – ĐỀ 2

Câu 1 (3 điểm):

a/ Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1-1}{[\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1](x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, ta đ-ợc:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\frac{t^3+1}{2}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

b/ Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$$

Câu 2 (2 điểm):

a/ Ta có: TXĐ: \mathbb{R} ;

$$f(2) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12,$$

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

Vậy, hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.

b/ Nếu thay 5 bằng 12 thì hs sẽ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

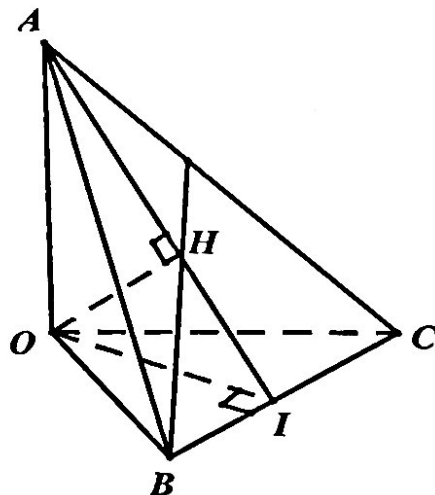
Câu 3 (3 điểm):

a) Ta có

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.



b) Gọi $I = AH \cap BC$, do $\begin{cases} OI \subset (OAH) \\ BC \perp (OAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp OI$

Ta giác OAI vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2}$ (*).

Tương tự cho tam giác OBC ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ thay vào (*) ta được

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Câu 4 (1 điểm):

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên \mathbb{R} nên cũng liên tục trên $[-1; 1]$.

Ta có: $f(-1).f(1) = -3.1 = -3 < 0$,

Vậy phương trình $f(x) = 0$ sẽ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Câu 5 (1 điểm) Ta có:

$$\left| \frac{\cos(n\pi)}{4^n} \right| < \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ và } \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.