

I. Trắc nghiệm (2 điểm)

Chọn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 + 25) \cdot \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0$ là:

- A. $\left\{\pm 5; \pm \frac{3}{2}\right\}$ B. $\left\{-25; \frac{9}{4}\right\}$ C. $\left\{\pm \frac{3}{2}\right\}$ D. $\left\{-5; \frac{3}{2}\right\}$

Câu 2. Nghiệm của bất phương trình: $12 - 3x \leq 0$ là:

- A. $x \leq 4$ B. $x \geq 4$ C. $x \leq -4$ D. $x \geq -4$

Câu 3: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP và $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = 9$

- A. $\frac{MN}{AB} = 9$ B. $\frac{MN}{AB} = 3$ C. $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{9}$ D. $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$

Câu 4. Cho tam giác ABC, AD là phân giác BAC biết $AB = 16\text{cm}$, $AC = 24\text{cm}$, $DC = 15\text{cm}$, khi đó BD bằng: AD là phân giác BAC

- A. 10cm B. $\frac{128}{5}$ cm C. $\frac{1}{10}$ cm D. $\frac{45}{2}$ cm

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{y-1} - \frac{y}{1-y^2}$ và $B = \frac{y^2 - y}{2y+1}$

1. Tính giá trị biểu thức A tại $y = 2$.
2. Rút gọn biểu thức $M = A \cdot B$.
3. Tìm giá trị của y để biểu thức $M < 1$.

Bài 2: Một ô tô đi từ Hà Nội đến Đền Hùng với vận tốc trung bình là 30km/h. Trên quãng đường từ Đền Hùng về Hà Nội, vận tốc ô tô tăng thêm 10km/h nên thời gian về rút ngắn hơn thời gian đi là 36 phút. Tính quãng đường từ Hà Nội đến Đền Hùng.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BH.

- a. CMR: ΔHBA đồng dạng với ΔHCB , từ đó suy ra $HB^2 = HC.HA$.
- b. Kẻ $HM \perp AB = M, HN \perp BC = N$. CMR: $MN = BH$.
- c. Lấy I, K lần lượt là trung điểm của HC và HA. Tứ giác KMNI là hình gì? Vì sao?
- d. So sánh diện tích tứ giác KMNI và diện tích tam giác ABC.

Bài 4 (0,5 điểm) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 + 25) \cdot \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0$ là:

- A. $\left\{\pm 5; \pm \frac{3}{2}\right\}$ B. $\left\{-25; \frac{9}{4}\right\}$ C. $\left\{\pm \frac{3}{2}\right\}$ D. $\left\{-5; \frac{3}{2}\right\}$

Chọn Đáp C vì:

$$(x^2 + 25) \cdot \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 25 = 0 \\ x^2 - \frac{9}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -25 (L) \\ x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 2. Nghiệm của bất phương trình: $12 - 3x \leq 0$ là:

- A. $x \leq 4$ B. $x \geq 4$ C. $x \leq -4$ D. $x \geq -4$

Chọn B vì: $12 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -12 \Leftrightarrow x \geq 4$

Câu 3: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP và $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = 9$

- A. $\frac{MN}{AB} = 9$ B. $\frac{MN}{AB} = 3$ C. $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{9}$ D. $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$

Chọn D vì: Do tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP nên $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\frac{AB}{MN}\right)^2$ mà $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = 9$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{MN}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{AB}{MN} = 3 \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC, AD là phân giác BAC biết $AB = 16\text{cm}$, $AC = 24\text{cm}$, $DC = 15\text{cm}$, khi đó BD bằng: AD là phân giác BAC

A. 10cm

B. $\frac{128}{5}$ cm

C. $\frac{1}{10}$ cm

D. $\frac{45}{2}$ cm

Chọn đáp án A vì: Do AD là phân giác BAC , áp dụng tính chất tia phân giác, ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{DB}{15} \Rightarrow DB = \frac{16 \cdot 15}{24} = 10 \text{ (cm)}$$

TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{y-1} - \frac{y}{1-y^2}$ và $B = \frac{y^2 - y}{2y+1}$

4. Tính giá trị biểu thức A tại $y = 2$.
5. Rút gọn biểu thức $M = A \cdot B$.
6. Tìm giá trị của y để biểu thức $M < 1$.

Giải:

1. Thay $y = 2$ vào A ta được $A = \frac{1}{2-1} - \frac{2}{1-2^2} = \frac{5}{3}$.

2. ĐKXD: $y \neq \pm 1; y \neq \frac{1}{2}$.

$$A = \frac{1}{y-1} - \frac{y}{1-y^2} = \frac{(1+y)+y}{(y+1)(y-1)} = \frac{2y+1}{(y+1)(y-1)}$$

$$\rightarrow M = A \cdot B = \frac{y}{y+1}$$

3. Ta có:

$$M < 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{y+1} < 0$$

$$\text{Vì } -1 < 0 \Rightarrow y+1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$$

$$\text{Vậy } M < 1 \text{ thì } y > -1; y \neq 1; y \neq \frac{1}{2}$$

Bài 2: Một ô tô đi từ Hà Nội đến Đền Hùng với vận tốc trung bình là 30km/h. Trên quãng đường từ Đền Hùng về Hà Nội, vận tốc ô tô tăng thêm 10km/h nên thời gian về rút ngắn hơn thời gian đi là 36 phút. Tính quãng đường từ Hà Nội đến Đền Hùng.

Giải: Đòi: 36 phút tương ứng với $\frac{3}{5}$ giờ.

Gọi x (km) là chiều dài quãng đường từ Hà Nội đến Đền Hùng ($x > 0$).

Theo đề ta có:

Thời gian xe đi từ Hà Nội đến Đền Hùng là: $\frac{x}{30}$ (h)

Thời gian xe đi từ Đền Hùng đến Hà Nội là: $\frac{x}{40}$ (h)

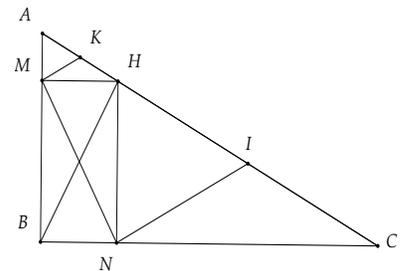
Ta có: $\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{3}{5} \rightarrow x = 72$

Vậy quãng đường từ Hà Nội đến Đền Hùng dài 72km.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BH.

- CMR: ΔHBA đồng dạng với ΔHCB , từ đó suy ra $HB^2 = HC.HA$.
- Kẻ $HM \perp AB = M, HN \perp BC = N$. CMR: $MN = BH$.
- Lấy I, K lần lượt là trung điểm của HC và HA. Tứ giác KMNI là hình gì? Vì sao?
- So sánh diện tích tứ giác KMNI và diện tích tam giác ABC.

Giải:



- Xét ΔHBA và ΔHCB , ta có:

$$\angle HBA = \angle HCB \quad (\text{cùng phụ với } \angle BAC)$$

$$\angle AHB = \angle BHC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta HBA \text{ đồng dạng } \Delta HCB \text{ (g-g)}$$

$$\rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HA}{HB} \rightarrow HB^2 = HC.HA$$

- Tứ giác HMAN có 3 góc vuông nên đó là hình chữ nhật, suy ra $MN = BH$.

- $MH \parallel BC$ nên $\angle KHM = \angle ICN$.

$$K \text{ là trung điểm cạnh huyền } AH \text{ nên } \angle KHM = \angle KMH.$$

$$I \text{ là trung điểm cạnh huyền } HC \text{ nên } \angle ICN = \angle INC.$$

$$\angle HIN = \angle INC + \angle ICN \quad (\text{góc ngoài tam giác}).$$

$$\angle MKH + \angle HIN = \angle MKH + 2\angle ICN = \angle MKH + 2\angle KHM = 180^\circ$$

Nên $MK \parallel NI$ suy ra KMNI là hình thang.

Ta có $\Delta KAM : KA = KM \left(= \frac{1}{2} AH \right) \rightarrow \angle KAM = \angle AMK$

Vì HMBN là hình chữ nhật nên $\angle NMB = \angle MBH$

Mà $\angle MBH = \angle BCA \rightarrow \angle AMK + \angle NMB = \angle MAH + \angle ICN = 90^\circ$

Suy ra KMNI là hình thang vuông.

d. Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

$$S_{KMNI} = \frac{1}{2} (KM + NI) \cdot MN = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AH + \frac{1}{2} HC \right) \cdot BH = \frac{1}{4} AC \cdot BH$$

$$\rightarrow S_{KMNI} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Bài 4 (0,5 điểm) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Giải

Cách 1:

Ta có:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c^2} - \frac{2}{c} + \frac{1}{b} + \frac{c}{a^2} - \frac{2}{a} + \frac{1}{c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{b} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{a}}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{c} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{b}}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{c}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{b} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{c} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{a} - \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a, b, c > 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy $a, b, c > 0$ thì $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Cách 2:

Với $a, b, c > 0$, áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}$$

$$\frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}$$

$$\frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} + \frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} + \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$$

Vậy $a, b, c > 0$ thì $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.