SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: TOÁN LỚP 11
Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

Câu 1.

a) Giải phương trình: $2\cos 4x + \cos 2x = 1 + \sqrt{3}\sin 2x$.

b) Giải phương trình: $8x^3 + 10x - 17 = 8\sqrt[3]{-24x^2 + 30x - 7}$.

Câu 2.

a) Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, với *n* là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = 78$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

b) Cho tam giác ABC thỏa mãn $C \le B \le A \le 90^0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = cos\dfrac{A-B}{2}.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}$.

Câu 3. Trong mặt phẳng *(P)* cho nửa đường tròn *(O)* đường kính *AC,* điểm *B* di động trên nửa đường tròn *(O)* với *B* khác *A* và *C* . Trên nửa đường thẳng *Ax* vuông góc với *(P)* lấy điểm *S* sao cho $SA = AC = a$. Gọi *H, K* lần lượt là chân đường cao hạ từ *A* xuống *SB, SC.*

a) Chứng minh rằng tam giác *AHK* vuông. Tính diện tích tam giác *SBC* theo a biết $HK = \dfrac{a\sqrt{34}}{34}$.

b) Xác định vị trí của B trên nửa đường tròn (O) sao cho tổng diện tích các tam giác *SAB* và *CAB* lớn nhất.

Câu 4. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = 3 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2x_n + 4}{x_n^2 - x_n + 6} \text{ với } n = 1, 2, ...$$

Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2 + 4}$. Tìm $\lim y_n$.

Câu 5. Cho *x, y, z* dương thỏa mãn $3xy + yz + 2zx = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{4+y^2} + \frac{9}{9+z^2}.$$

-------------HẾT -------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: …………………………………………….Số báo danh: ……………………….

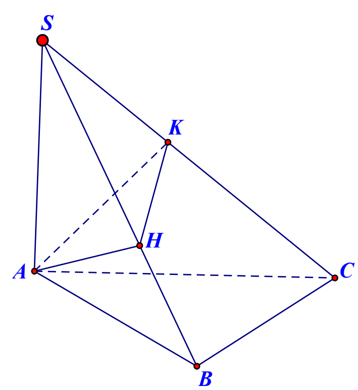
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN: TOÁN LỚP 11

HƯỚNG DẪN CHẤM

Lưu ý: Mọi cách giải khác mà đúng và gọn đều cho điểm tương ứng

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a 3.0đ	Phương trình đã cho tương đương với: $cos^2 2x - 3\sin^2 2x + cos2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$	**0.5**
	$\Leftrightarrow\ (cos2x - \sqrt{3}\sin 2x)(cos2x - \sqrt{3}\sin 2x + 1) = 0$	**0.5**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0 \quad (1) \\ cos2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1 \quad (2) \end{array}\right.$	**0.5**
	Giải (1): $(1) \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$	**0.5**
	Giải (2): $(2) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$	**0.5**
	Vậy: Nghiệm phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in Z$	**0.5**
Câu 1b 2.5đ	Đặt $\sqrt[3]{-24x^2 + 30x - 7} = y$ (*) , ta có hệ : $\begin{cases} 8x^3 + 10x - 17 = 8y \quad (1) \\ -24x^2 + 30x - 7 = y^3 (2) \end{cases}$	**0.5**
	Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có: $(2x-2)^3 + 8(2x-2) = y^3 + 8y$ Từ phương trình này rút ra được: $y = 2x - 2$	**0.5**
	Thế vào (*) ta được: $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ (3)	**0.25**
	Đặt x=cost với $t \in [0;\pi]$ ta được: $cos3t = \frac{1}{2}$ Giải phương trình này ta được: $t = \frac{\pi}{9}; t = \frac{3\pi}{9}; t = \frac{5\pi}{9}$	**0,5**
	Do 3 số $cos\frac{\pi}{9}$; $cos\frac{5\pi}{9}$; $cos\frac{7\pi}{9}$ đôi một phân biệt nên phương trình (3) có đúng 3 nghiệm là: $x = cos\frac{\pi}{9}$; $x = cos\frac{5\pi}{9}$; $x = cos\frac{7\pi}{9}$	**0,5**
	Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $x = cos\frac{\pi}{9}$; $x = cos\frac{5\pi}{9}$; $x = cos\frac{7\pi}{9}$	**0.25**
Câu 2a 3.0đ	Ta có: $C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{C_n^3}{C_n^2} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = 78$ $\Leftrightarrow n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 = 78$	**0.5**
	$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = 12$	**0.5**

	Với $n=12$ kết hợp với giả thiết ta được: $a_k = C_{12}^k.2^k$ với k = 0,1,...,12	**0.5**
	Xét $a_{k+1} > a_k \Rightarrow k < \dfrac{23}{3} \Rightarrow k \le 7 \Rightarrow a_0 < a_1 < ... < a_7 < a_8$ (1)	**0.5**
	Tương tự ta có: $a_8 > a_9 > ... > a_{11} > a_{12}$ (2)	**0.5**
	Từ (1) và (2) ta được: $Max(a_0, a_1, ..., a_{12}) = a_8 = 2^8 C_{12}^8$	**0.5**
Câu 2b 2.5đ	$P = cos\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}.cos\dfrac{A-B}{2}\left(cos\dfrac{A-B}{2} - cos\dfrac{A+B}{2}\right) =$ $= \dfrac{1}{2}cos^2\dfrac{A-B}{2} - \dfrac{1}{2}.cos\dfrac{A-B}{2}cos\dfrac{A+B}{2} =$ $= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\left[cos(A-B) - (cosA + cosB)\right]$	**0.5**
	Chứng minh được: $cosA + cosB \le cos(A-B)$ (1) Thật vậy: $cos(A-B) = \dfrac{\sin 2A + \sin 2B}{2\sin(A+B)} = \dfrac{\sin A}{\sin C}.cosA + \dfrac{\sin B}{\sin C}.cosB$	**0.5**
	$\le cosA + cosB$ (do $0 \le C \le B \le A \le 90^0$) Do đó (1) được chứng minh.	**0.5**
	Suy ra : $P \ge \dfrac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{\sin A}{\sin C} = 1 \\ \dfrac{\sin B}{\sin C} = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \cos A = 0 \\ \dfrac{\sin B}{\sin C} = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ tam giác đều hoặc vuông cân tại A	**0,5**
	Vậy: $MinP = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi ΔABC đều hoặc vuông cân tại A	**0.5**
Câu3a 3.0đ	 Ta có: $BC \perp AB$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$	**0,75**
	Lại có: $AK \perp SC$ (gt) $\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$ $\Rightarrow \Delta AKH$ vuông tại H	**0,75**
	ΔSAC vuông tại A và $AC = AS = a \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	**0,25**
	ΔSHK vuông tại H nên : $AH^2 = AK^2 - KH^2 = \dfrac{8a^2}{17}$	**0.25**
	ΔSAB vuông tại A $\Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{9}{8a^2} \Rightarrow AB^2 = \dfrac{8a^2}{9}$	**0.25**
	ΔABC vuông tại B $\Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 = \dfrac{a^2}{9} \Rightarrow BC = \dfrac{a}{3}$	**0.25**

	ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow S_{\Delta SBC}=\dfrac{BC.BS}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.	**0.5**
Câu3b 2.0đ	Đặt $\widehat{ACB}=\alpha$ với $0^0<\alpha<90^0$, Khi đó: $AB=a\sin\alpha$, $BC=a\cos\alpha$	**0.25**
	Đặt $S=S_{\Delta SAB}+S_{\Delta CAB}=\dfrac{a^2(1+cos\alpha)\sin\alpha}{2}$	**0.5**
	Xét: $T=(1+cos\alpha)\sin\alpha$ có: $T^2=(1+cos\alpha)^2\sin^2\alpha=(1+cos\alpha)^3(1-cos\alpha)$	**0.25**
	Áp dụng bất đẳng thức cô si cho 4 số dương : $(1+cos\alpha)+(1+cos\alpha)+(1+cos\alpha)+3(1-cos\alpha)\ge 4\sqrt[4]{3T^2}$ $\Leftrightarrow 6\ge 4\sqrt[4]{3T^2}\ \Rightarrow T\le\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$ có "=" khi $cos\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$	**0.5**
	Vậy: Điểm B thuộc nửa đường tròn (O) và $\widehat{ACB}=60^0$.	**0.5**
Câu 4 2.0đ	$x_{n+1}-2=\dfrac{(x_n^2+4)(x_n-2)}{x_n^2-x_n+6}$ (1) Do $x_1=3$ nên bằng qui nap chứng minh được $x_n>2$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$	**0.25**
	$x_{n+1}-x_n=\dfrac{(x_n-2)^2}{x_n^2-x_n+6}>0\ \Rightarrow\ (x_n)$ là dãy tăng (2)	**0.25**
	Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow\exists a>3$ để $\lim x_n=a$. Khi đó: $a=\dfrac{a^3+2a+4}{a^2-a+6}\Leftrightarrow a^2-4a+4=0\ \Leftrightarrow\ a=2$ (loại) Do đó: $\lim x_n=+\infty$ (3)	**0.5**
	Từ (1) suy ra : $\dfrac{1}{x_{n+1}-2}=\dfrac{1}{x_n-2}-\dfrac{1}{x_n^2+4}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x_n^2+4}=\dfrac{1}{x_n-2}-\dfrac{1}{x_{n+1}-2}$ $\Rightarrow\ y_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2+4}=1-\dfrac{1}{x_{n+1}-2}$ (4)	**0.5**
	Từ (3) và (4) suy ra : $\lim y_n=1$	**0.5**
Câu 5 2.0đ	Đặt $x=a,y=2b,z=3c$ Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}a,b,c>0\\ ab+bc+ca=1\end{cases}$ (*) Khi đó: $P=\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}$	**0,5**
	Từ giả thiết (*) $\Rightarrow$ tồn tại ΔABC sao cho: $a=\tan\dfrac{A}{2};b=\tan\dfrac{B}{2};c=\tan\dfrac{C}{2}$	**0,5**
	$P=\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}=2-\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}.cos\dfrac{B-C}{2}$ $\le 2-\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{9}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{A}{2}\right)^2\le\dfrac{9}{4}$	**0,5**
	Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\\ B=C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ b=c=\sqrt{3}\end{cases}$ Vậy: MaxP = $\dfrac{9}{4}$ đạt được khi $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3};b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3};c=\sqrt{3}$	**0.5**