

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) + 8xy + 1 = 4x + 4y \\ x^3 + 5x^2 + 6x = (3x + 2y + 1)(\sqrt{3 - 2y} + \sqrt{5 - x}) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Giải phương trình $\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) + 4 \cos^3 2x = 2 \cos 4x + 3 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right)$.

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x-1} \cdot \sqrt{x-2} - 2}{x^2 - 9}$.

b) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 6} \end{cases}; \forall n \geq 1$. Tìm giới hạn $\lim (2^n \cdot u_n)$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Biết SCD là tam giác đều. Gọi H là trung điểm của AB và M, N lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAD, \triangle SBC$. Gọi K là trung điểm CD và G là trọng tâm của $\triangle HCD$.

a) Chứng minh $(MNG) \parallel (SCD)$.

b) Tính góc giữa AC và (SAD) .

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle SDC$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (MNI) .

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{5n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n-1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$.

b) Cho một đa giác đều $2n$ đỉnh với $n \geq 3$. Gọi S tập các tam giác cân, không đều và có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác. Gọi T là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác. Chứng minh rằng số phần tử của tập $T \setminus S$ không vượt quá $\frac{n}{3}(4n^2 - 12n + 10)$.

Câu 5 (2,0 điểm). Một cái phễu có dạng hình nón có chiều cao bằng 3cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Bịt kín miệng của phễu, tính chiều cao mực nước trong nón sau khi lật lại. (Biết công thức tính thể tích của khối nón có bán kính đáy $r = OA$ và chiều cao $h = SO$ là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, xem hình vẽ).

