SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH THUẬN

TOANMATH.com

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN – LỚP 12
NĂM HỌC 2020 - 2021

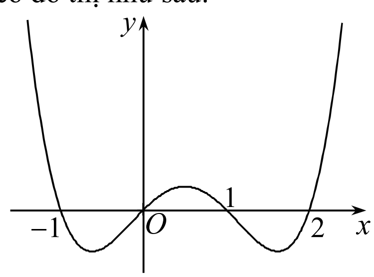
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 01 trang + 05 bài toán tự luận

Bài 1. (*6,0 điểm*)

a. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x-11)\sqrt{x^2+9}$ trên đoạn $[0;4]$.

b. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x+2\right)$.

Bài 2. (*5,0 điểm*) Xét dãy số (u_n) thỏa $u_1=a+b,\ u_{n+1}=u_1-\dfrac{ab}{u_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$; trong đó a,b là hai số thực dương.

a. Chứng minh (u_n) là dãy số giảm khi $a=b$;

b. Tính $\lim u_n$.

Bài 3. (*3,0 điểm*) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=1 \\ 3x^2+y-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 4. (*2,0 điểm*) Cho hai số nguyên dương k và n sao cho $k\le n$. Xét tất cả các tập hợp con gồm k phần tử của tập hợp $\{1,2,...,n\}$. Trong mỗi tập hợp con ta chọn ra phần tử nhỏ nhất. Chứng minh tổng tất cả các phần tử được chọn bằng C_{n+1}^{k+1}.

Bài 5. (*4,0 điểm*) Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là điểm di động trên (O) sao cho M khác với các điểm A,B và OM không vuông góc với AB. Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau tại C. Gọi (I) là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. Đường thẳng OC cắt lại (I) tại điểm thứ hai là E.

a. Chứng minh E là trung điểm của OC;

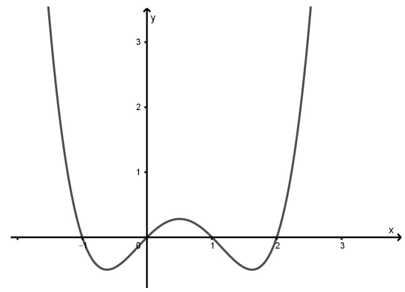
b. Gọi CD là đường kính của (I). Chứng minh đường thẳng qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên (O).

---------- **HẾT** ----------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x-11)\sqrt{x^2+9}$ trên đoạn $[0;4]$.

b) Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x+2\right)$.

Lời giải

a) Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{2x^2-11x+9}{\sqrt{x^2+9}}$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (\text{TM})\\ x=\dfrac{9}{2}\ (\text{KTM})\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=-33, y(1)=-10\sqrt{10}, y(4)=-35$.

Vậy $\min\limits_{[0;4]} y=-35, \max\limits_{[0;4]} y=-10\sqrt{10}$.

b) Đặt $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)$. Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x+2\right)$.

Gọi $x=x_1, x=x_2, x=x_3$ (với $x_1<x_2<x_3$) là các điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Từ đồ thị, ta có $x_1\in(-1;0), x_2\in(0;1), x_3\in(1;2)$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ f'\left(x^2-2x+2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x+2=x_1\\ x^2-2x+2=x_2\\ x^2-2x+2=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x+2-x_1=0\ (1)\\ x^2-2x+2-x_2=0\ (2)\\ x^2-2x+2-x_3=0\ (3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình (1), ta có $\Delta'=1-(2-x_1)=x_1-1<0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Xét phương trình (2), ta có $\Delta'=x_2-1<0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Xét phương trình (3), ta có $\Delta'=x_3-1>0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 2. Xét dãy số (u_n) thỏa $u_1=a+b,\ u_{n+1}=u_1-\dfrac{ab}{u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$; trong đó a,b là hai số thực dương.

a) Chứng minh (u_n) là dãy số giảm khi $a=b$.

b) Tính $\lim u_n$.

Lời giải

a) Khi $a=b$, ta có $\begin{cases} u_1 = 2a \\ u_{n+1} = u_1 - \dfrac{a^2}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Ta chứng minh: $u_n = \dfrac{n+1}{n}a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (1)$ bằng phương pháp quy nạp.

□ Ta có: $u_1 = 2a \Rightarrow (1)$ đúng với $n=1$.

□ Giả sử (1) đúng với $n=k$, tức là: $u_k = \dfrac{k+1}{k}a; (k \ge 1)$.

Ta có: $u_{k+1} = u_1 - \dfrac{a^2}{u_k} = 2a - \dfrac{a^2}{\dfrac{k+1}{k}a} = \dfrac{k+2}{k+1}a \Rightarrow (1)$ đúng với $n=k+1$.

Vậy $u_n = \dfrac{n+1}{n}a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (1)$, ta có $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{n+2}{n+1}a}{\dfrac{n+1}{n}a} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm .

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b$.

* Trường hợp 1: $a=b$

Khi đó $u_n = \dfrac{n+1}{n}a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

* Trường hợp 2: $a>b$

Khi đó:

$$u_2 = a+b-\frac{ab}{a+b} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2};$$

$$u_3 = a+b-\frac{ab}{u_2} = a+b-\frac{ab\left(a^2-b^2\right)}{a^3-b^3} = \frac{a^4-b^4}{a^3-b^3};$$

Qui nạp ta được $u_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} & \text{khi } a>b \\ \dfrac{n+1}{n}a & \text{khi } a=b \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

* Khi $a=b$, ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{(n+1)a}{n} = \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a = a$.

* Khi $a>b$, ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} = \lim \dfrac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{a}\left[1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right]} = a$.

Vậy $\lim u_n = a$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=1 \\ 3x^2+y-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=1 & (1) \\ 3x^2+y-m=0 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $xy \geq 0$.

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{xy}=1-x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ xy=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y=\dfrac{1}{x}-2+x \end{cases}.$$

Thay vào phương trình (2) ta có: $3x^2+\dfrac{1}{x}-2+x=m$ (3).

Để hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;1]\setminus\{0\}$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}-2+x$, $x\in(-\infty;1]\setminus\{0\}$.

Ta có: $f'(x)=6x-\dfrac{1}{x^2}+1=\dfrac{6x^3+x^2-1}{x^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^3+x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	3

Số nghiệm của phương trình (3) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;1]\setminus\{0\}$ khi $m\in\left(\dfrac{5}{4};3\right]$.

Vậy $m\in\left(\dfrac{5}{4};3\right]$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=1 \\ 3x^2+y-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hai số nguyên dương k và n sao cho $k \le n.$ Xét tất cả các tập hợp con gồm k phần tử của tập hợp $\{1,2,...,n\}$. Trong mỗi tập hợp con ta chọn ra phần tử nhỏ nhất. Chứng minh tổng tất cả các phần tử được chọn bằng C_{n+1}^{k+1}.

Lời giải

Theo đề bài ta có:

TH1: Tập có phần tử nhỏ nhất là số 1 có C_{n-1}^{k-1} tập.

TH2: Tập có phần tử nhỏ nhất là số 2 có C_{n-2}^{k-2} tập.

…

TH k: Tập có phần tử nhỏ nhất là số 2 có C_{n-k}^{k-k} tập.

Suy ra tổng các phần tử được chọn là $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + ... + C_{n-k}^{k-k}$.

Dễ dàng ta chứng minh được $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + ... + C_{n-k}^{k-k} = C_{n+1}^{k+1}$ (đpcm).

Câu 5. Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là điểm di động trên (O) sao cho M khác với các điểm A, B và OM không vuông góc với $AB.$ Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau tại $C.$ Gọi (I) là đường tròn đi qua và tiếp xúc với đường thẳng AC tại $C.$ Đường thẳng OC cắt lại (I) tại điểm thứ hai là $E.$

a) Chứng minh E là trung điểm của OC.

b) Gọi CD là đường kính của (I). Chứng minh đường thẳng qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định M di động trên (O).

Lời giải

a) Có $\widehat{MCO} = \widehat{ACO} = \widehat{CME} \Rightarrow EC = EM$

Mà ΔCMO vuông tại M

$\Rightarrow M$ là trung điểm OC.

b) Vẽ $DF \perp BC \Rightarrow F \in (I)$

$DE \cap AB = E'$, $DD' \perp AB$

F' là trung điểm của $AO \Rightarrow F'$ cố định

Ta có $CD // E'O$ $(\perp CA)$

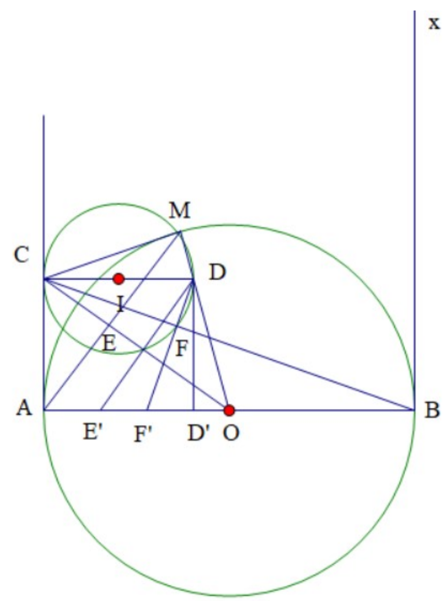
E là trung điểm của CO

$\Rightarrow CDOE'$ là hình bình hành

Mà $CDD'A$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow D'A = CD = E'O$

$\Rightarrow F$ là trung điểm $D'E'$



Gọi Bx là tiếp tuyến tại B của (O).

Có: $(BC, Bx, BM, BA) = -1$.

Mà $BC \perp DF, Bx \perp DC, BM \perp DE, BA \perp DD'$ $(BM \perp AM, AM \perp OC, OC \perp DE)$

$\Rightarrow (DC, DF, DE, DD') = -1$.

Mà $DC//AB \Rightarrow DF$ qua trung điểm $D'E'$.

$\Rightarrow \overline{D, E', F'} \Rightarrow DF$ qua F' cố định.

______________________ **HẾT** ______________________