TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 12 NĂM HỌC 2019 - 2020
(Đề thi gồm 01 trang)	**MÔN: TOÁN**
	Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2019$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

b) Cho hàm số $y=\frac{mx-m+2}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA, OB bằng $45°$.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình lượng giác sau $\frac{\cos x(2\sin x+1)}{(\sin x+1)(2\sin x-1)}=\sqrt{3}$.

b) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2-4y+3\sqrt{x^2y+3y}+3=0 \\ \sqrt{x^2+3x-y+5}+\sqrt[3]{3x-2}=2 \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$.

Câu 3 *(2,0 điểm)* Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA'=\frac{3a\sqrt{6}}{2}$ và góc $\widehat{BAC}=60°$. Gọi M là điểm trên cạnh CC' sao cho $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MC'}$.

a) Chứng minh rằng $AM\perp B'M$.

b) Tính khoảng cách từ đỉnh A' đến mặt phẳng $(AB'M)$.

Câu 4 *(1,0 điểm)* Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Tính $\lim(u_1u_2u_3\ldots u_n)$.

Câu 5 *(1,0 điểm)* Cho đa giác lồi (H) có n đỉnh ($n\in\mathbb{N}, n>4$). Biết số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng một cạnh là cạnh của (H). Xác định n.

Câu 6 *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có phương trình đường chéo AC là $x-y+1=0$, điểm $G(1;4)$ là trọng tâm tam giác ABC, điểm $E(0;-3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành đã cho, biết rằng diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và đỉnh A có tung độ dương.

Câu 7 *(1,0 điểm)* Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$$

--------------- ***HẾT*** ---------------

TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 12
NĂM HỌC: 2019 - 2020
MÔN: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

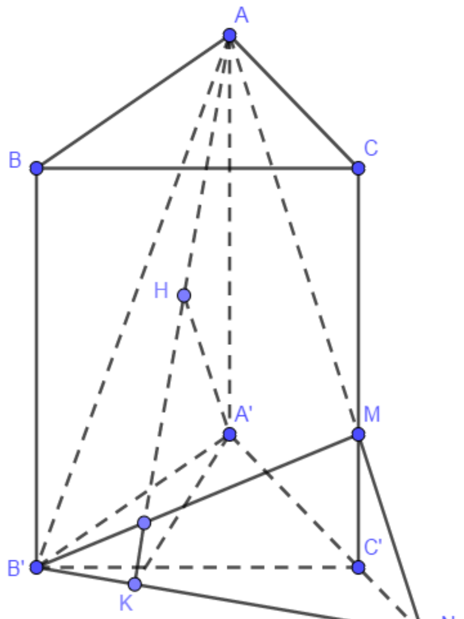
I. <u>Những lưu ý chung</u>:

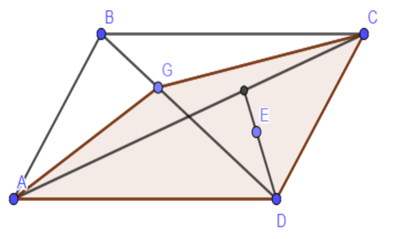
- Điểm toàn bài thi không làm tròn.
- Câu 3 học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Học sinh giải theo cách khác đáp án mà đúng vẫn cho điểm tối đa.

II. <u>Đáp án và thang điểm</u>:

Câu	Đáp án	Điểm
1	a)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2019$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.	1
	Ycbt $\Leftrightarrow y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)\ge 0, \forall x\in[2;+\infty)$	0,25
	$\Leftrightarrow m\ge \frac{-2x+6}{x^2-2x+3}=f(x), \forall x\in[2;+\infty) \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[2;+\infty)} f(x)$	0,25
	Ta có: $f'(x)=\frac{2(x^2-6x+3)}{(x^2-2x+3)^2}; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6}\,(tm) \\ x=3-\sqrt{6}\,(ktm)\end{array}\right.$	0,25
		0,25
	b) Cho hàm số $y=\frac{mx-m+2}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA, OB bằng 45°.	1
	Phương trình hoành độ: $\frac{mx-m+2}{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow (x-1)(2x+3-m)=0, (x\ne -1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{m-3}{2}\end{array}\right.$	0,25
	Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $m\ne 1 \wedge m\ne 5$. Khi đó, $A(1;1), B\left(\frac{m-3}{2}; m-4\right)$.	0,25
	Điều kiện để OA, OB tạo với nhau một góc 45° là: $\left\|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right\|=OA.OB.\cos 45^\circ \Leftrightarrow \left\|\frac{m-3}{2}+m-4\right\|=\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\left(\frac{m-3}{2}\right)^2+(m-4)^2}$	0,25
	$\Leftrightarrow m^2-7m+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=4\end{array}\right.(tm)$	0,25
2	a) Giải phương trình lượng giác sau $\frac{\cos x(2\sin x+1)}{(\sin x+1)(2\sin x-1)}=\sqrt{3}$.	1

	ĐKXĐ: $\begin{cases}\sin x \neq -1\\ \sin x \neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$. Phương trình đã cho biến đổi thành: $\sin 2x + \cos x = \sqrt{3}\left(2\sin^2 x + \sin x - 1\right)$ $\Leftrightarrow \sin 2x + \cos x = \sqrt{3}\left(\sin x - \cos 2x\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = -x + \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,(ktm) \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k.\dfrac{2\pi}{3}\,(tm) \end{array}\right.$	0,25
	Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{5\pi}{18} + k.\dfrac{2\pi}{3}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$	0,25
	b) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 - 4y + 3\sqrt{x^2y + 3y} + 3 = 0 \\ \sqrt{x^2 + 3x - y + 5} + \sqrt[3]{3x - 2} = 2 \end{cases}$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.	1
	ĐK: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + 3x - y + 5 \geq 0 \end{cases}$. Biến đổi phương trình đầu về dạng: $4\dfrac{y}{x^2+3} - 3\sqrt{\dfrac{y}{x^2+3}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{y}{x^2+3}} = 1 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x^2+3}} = -\dfrac{1}{4}\,(l) \end{array}\right. \Rightarrow y = x^2 + 3$	0,5
	Thay $y = x^2 + 3$ vào phương trình thứ hai, ta được: $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{3x-2} = 2$. Vế trái pt là hàm đồng biến trên $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$ mà $x = 2$ là nghiệm nên nghiệm đó duy nhất. Suy ra: $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 3 = \dfrac{31}{9}$ (tm)	0,25
	Vậy, nghiệm của hệ là: $\left(x; y\right) = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{31}{9}\right)$	0,25
3	Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$ và góc $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi M là điểm trên cạnh CC' sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MC'}$. a) Chứng minh rằng $AM \perp B'M$. b) Tính khoảng cách từ đỉnh A' đến mặt phẳng $\left(AB'M\right)$.	2

	 a) Chứng minh rằng $AM \perp B'M$. Từ giả thiết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MC'}$ suy ra: $CM = a\sqrt{6},\ MC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC $\Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.	0,5
	Sử dụng Pitago, dễ dàng tính được: $AB'^2 = \frac{29a^2}{2},\ \mathrm{AM}^2 = 10a^2$ và $\mathrm{B'M}^2 = \frac{9a^2}{2}$.	0,25
	Từ đó suy ra: $AB'^2 = AM^2 + B'M^2$ hay tam giác $AB'M$ vuông tại M.	0,25
	b) Tính khoảng cách từ đỉnh A' đến mặt phẳng $(AB'M)$. Đặt $N = AM \cap A'C'$, gọi K là hình chiếu vuông góc của A' lên $B'N$ và H là hình chiếu vuông góc của A' lên AK. Ta có $\begin{cases} B'N \perp AK \Rightarrow B'N \perp A'H \\ A'H \perp AK \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (AB'M)$	0,25
	Do $\Delta NC'M \sim \Delta ACM$ theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$ nên dễ dàng suy ra: $C'N = a$ và theo định lí cosin suy ra: $B'N = a\sqrt{7}$	0,25
	$A'K = \frac{2.S_{A'B'N}}{B'N} = \frac{2.\frac{1}{2}a.3a.\sin 60^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{14}$	0,25
	Trong tam giác vuông $AA'K$ ta có: $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'K^2} \Rightarrow A'H = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$ Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'M)$ bằng $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$.	0,25
4	Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},\ (n \in \mathbb{N}^*)$. Tính $\lim(u_1u_2u_3\ldots u_n)$.	1
	Ta có: $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25

	Suy ra: $u_1u_2u_3\ldots u_n=\frac{1.3}{2^2}\frac{2.4}{3^2}\frac{3.5}{4^2}\frac{4.6}{5^2}\cdots\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}.\frac{n+2}{n+1}$	0,5
	Do đó, $\lim(u_1u_2u_3\ldots u_n)=\frac{1}{2}$	0,25
5	Cho đa giác lồi (H) có n đỉnh ($n\in\mathbb{N},n>4$). Biết số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng một cạnh là cạnh của (H). Xác định n.	1
	Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) là: C_n^3	0,25
	Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 2 cạnh là cạnh của (H) là: n	0,25
	Số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 1 cạnh là cạnh của (H) là: $n(n-4)$	0,25
	Theo giả thiết, ta có: $C_n^3-n-n(n-4)=5n(n-4)\Leftrightarrow n^2-39n+140=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4(ktm)\\n=35(tm)\end{array}\right.$ Vậy đa giác (H) có 35 đỉnh.	0,25
6	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có phương trình đường chéo AC là $x-y+1=0$, điểm $G(1;4)$ là trọng tâm tam giác ABC, điểm $E(0;-3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành đã cho, biết rằng diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và đỉnh A có tung độ dương.	1
	 Vì $DE\perp AC$ nên $DE: x+y+3=0\Rightarrow D(t;-t-3)$. Ta có, $d(G,AC)=\frac{1}{3}d(B,AC)=\frac{1}{3}d(D,AC)$ $\Leftrightarrow\sqrt{2}=\frac{1}{3}\frac{\lvert 2t+4\rvert}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\Rightarrow D(1;-4)\\t=-5\Rightarrow D(-5;2)\end{array}\right.$	0,25
	Vì D và G nằm khác phía so với AC nên $D(1;-4)\Rightarrow B(1;8)\Rightarrow B: x=1$	0,25
	Vì $A\in AC\Rightarrow A(a;a+1)$. Từ gt $S_{AGCD}=32\Rightarrow S_{ABD}=24$ nên $\frac{1}{2}d(A,B).DB=24\Leftrightarrow\lvert a-1\rvert=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\Rightarrow A(5;6)(tm)\\a=-3\Rightarrow A(-3;-2)(l)\end{array}\right.$	0,25
	Từ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow C(-3;-2)$. Vậy tọa độ 4 đỉnh của hình bình hành là: $A(5;6)$, $B(1;8)$, $C(-3;-2)$, $D(1;-4)$	0,25
7	Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$	1
	Đưa bất đẳng thức về dạng: $\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\le 1$	0,25

	Ta chứng minh BĐT phụ: $\frac{1}{x^2-x+3}\le\frac{-x+4}{9},\forall x\in(0;3)$. Thật vậy, ta có: BĐT phụ tương đương với: $(x-1)^2(x-3)\le 0$ luôn đúng, $\forall x\in(0;3)$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1$.	
	Vì a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3 nên: $0<a,b,c<3$. Áp dụng BĐT phụ cho 3 số a, b, c: $\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{-a+4}{9};\frac{1}{b^2-b+3}\le\frac{-b+4}{9};\frac{1}{c^2-c+3}\le\frac{-c+4}{9}$.	0,25
	Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên , ta có: $\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\le\frac{-(a+b+c)+12}{9}=1$ (đpcm)	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.	0,25

--------------- ***HẾT*** ---------------