UBND THÀNH PHỐ THÁI NGUYÊN **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9** **NĂM HỌC 2022 - 2023** **MÔN THI: TOÁN** *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề* **(Đề thi gồm có 01 trang)**

Bài 1 (3 điểm). Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$.

Bài 2 (6 điểm). Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm giá trị của x để $B=\dfrac{2}{7}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

d. So sánh B^2 và $2B$.

Bài 3 (3 điểm).

a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3\ (m\neq 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt Ox tại điểm A, cắt Oy tại điểm B sao cho $\widehat{ABO}=30^0$.

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases}$.

Bài 4 (6 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, điểm M di động trên nửa đường tròn đó $(M\neq A, M\neq B)$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng AB. Vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn đường kính BH. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính AH tại điểm E $(E\neq A)$. Đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính BH tại điểm F $(F\neq B)$.

a. Chứng minh $ME.MA=MF.MB$.

b. Gọi K, G lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm H qua các đường thẳng MA, MB. Chứng minh ba điểm M, K, G thẳng hàng.

c. Chứng minh $MH^3=AB.AE.BF$.

d. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn đường kính AH và BH. Cho $AB=2R$. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $IEFJ$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo R.

Bài 5 (2 điểm).

a. Cho số tự nhiên n bất kỳ. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A=2026n^2+1014(n+p)$ luôn viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

b. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2-2x=27y^3$.

-------- **Hết** --------

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên.. SBD..............................

UBND THÀNH PHỐ THÁI NGUYÊN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐÁP ÁN

THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN THI : TOÁN
(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm có 01 trang)

Bài 1 (3 điểm). Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$

Lời giải:

$$A=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{1-3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2^3}}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{(1-\sqrt[3]{2})^3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=1$$

Vậy A=1

Bài 2 (6 điểm). Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm giá trị của x để $B=\dfrac{2}{7}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

d. So sánh B^2 và $2B$.

Lời giải:

a.

$$B=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\left(\frac{(x+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}=\frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy $B=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ Với $x\ge 0; x\ne 1$.

b. Ta có

$$B=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+3=0\\ \sqrt{x}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-3(loai)\\ \sqrt{x}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=4(tm\text{dkxd})$$

c. Do $x\ge 0; x\ne 1$ nên $x+\sqrt{x}+1\ge 1\,\forall x$

Do đó $0\le\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le\frac{2}{1}=2$ mà $B\in Z\Rightarrow B\in\{1;2\}$

+) Nếu $B=1\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ mà $(\sqrt{x}+\frac{1}{2}>0)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3-2\sqrt{5}}{2}(tm).$$

+) Nếu $B=2\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=0$ mà $(\sqrt{x}+1>0)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0(tm).$

Vậy để $B\in Z\Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{3-2\sqrt{5}}{2}\right\}.$

d. Xét hiệu $B-2=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}-2=\frac{-2(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}+1}<0$

Vì $x\ge 0; x\ne 1\Rightarrow x+\sqrt{x}>0$ và $x+\sqrt{x}+1>0$

Ta có $B^2-2B=B(B-2)<0\quad do\ B>0$

Vậy $B^2<2B$.

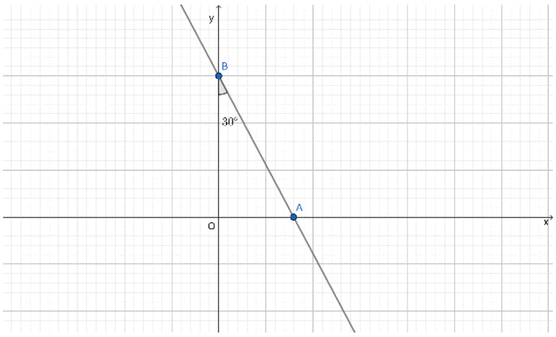
Bài 3 (3 điểm).

a. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3\ (m\ne 3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt Ox tại điểm A, cắt Oy tại điểm B sao cho $\widehat{\mathrm{ABO}}=30^{\circ}$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+4y^2=5\\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1\end{cases}$

Lời giải:

a. Cho $x=0;\ y=3$ ta được $B(0;3)\in Oy$



Cho $y=0; x=\dfrac{-3}{m-2}$ ta được

$A(\dfrac{-3}{m-2};0)\in \text{Ox}$

Suy ra, ta có: $OA=\left|\dfrac{-3}{m-2}\right|; OB=3$

Ta có:

$$\tan\widehat{OBA}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\left|\frac{-3}{m-2}\right|:3=\tan 30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow |m-2|=\sqrt{3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3}+2 \\ m=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$$

b. $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2y)^2-(4\text{x}y+5)=0 \\ (x+2y)(4\text{x}y+5)=1\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x+2y=a \\ 4\text{x}y+5=b\end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2-b=0 \\ ab=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=1\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4\text{x}y+5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1-2y \\ 4y(1-2y)+5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1-2y \\ -8y^2+4y+4=0\end{cases}$

$$\begin{cases} x=-1; y=1 \\ x=2; y=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

Vậy $(x;y)$ thoả mãn là $(-1;1);\ (2;\dfrac{-1}{2})$

Bài 4 (6 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, điểm M di động trên nửa đường tròn đó $(M\neq A, M\neq B)$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc với điểm M trên đường thẳng AB. Vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn đường kính BH. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính AH tại điểm E $(E\neq A)$. Đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính BH tại điểm F $(F\neq B)$.

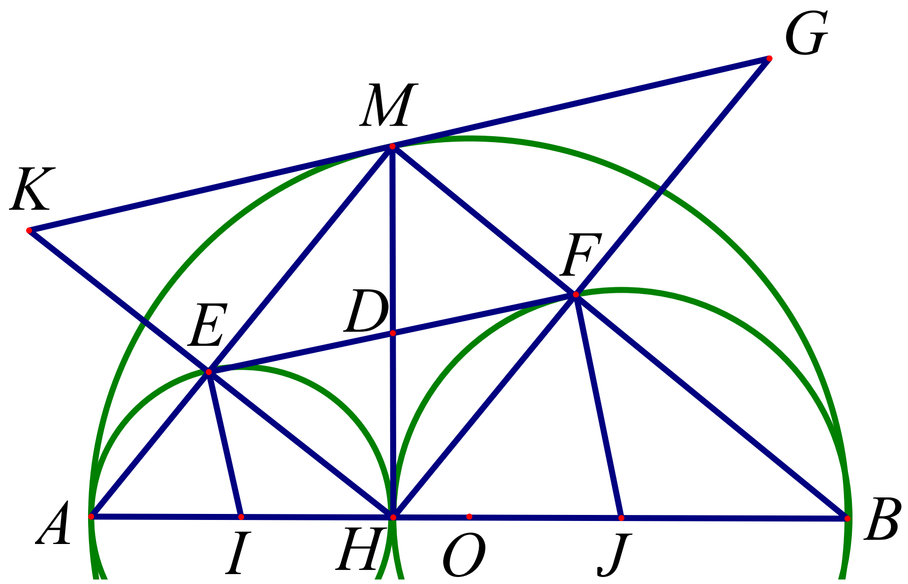
e. Chứng minh: $ME.MA=MF.MB$.

f. Gọi K, G lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm H qua các đường thẳng MA, MB. Chứng minh rằng ba điểm M, K, G thẳng hàng.

g. Chứng minh : $MH^3 = AB.AE.BF$

h. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn đường kính AH và BH. Cho $AB = 2R$. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác IEFJ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo R.

Lời giải



a) Xét ΔAHM vuông tại H có $HE \perp AM$ (Vì $\widehat{AEH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AH nên $\widehat{AEH} = 90^o$), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có: $MH^2 = ME.MA$

Xét ΔBHM vuông tại H có $HF \perp BM$ (Vì $\widehat{BFH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BH nên $\widehat{BFH} = 90^o$), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có: $MH^2 = MF.MB$

$\Rightarrow ME.MA = MF.MB$ (Vì cùng bằng MH^2)

b) Có K đối xứng với H qua AM $\Rightarrow$ AM là đường trung trực của KH

$\Rightarrow KM = KH$, $MA \perp KH$ tại E $\Rightarrow \Delta MKH$ cân tại M, có ME là đường cao nên cũng là đường phân giác của $\widehat{KMH} \Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{EMH} = \dfrac{\widehat{KMH}}{2} \Rightarrow \widehat{KMH} = 2.\widehat{EMH}$

CMTT ta có $MG = MH$, $\widehat{GMH} = 2.\widehat{FMH}$

Xét đường tròn (O) đường kính AB, có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AMB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{KMH} + \widehat{GMH} = 2.\widehat{EMH} + 2.\widehat{FMH} = 2(\widehat{EMH} + \widehat{FMH}) = 2.\widehat{AMB} = 2.90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ K, M, G thẳng hàng.

c) Áp dụng một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$AM.BM = MH.AB$; $AH^2 = AE.AM$; $BH^2 = BF.BM$; $MH^2 = AH.HB$

$\Rightarrow MH^4 = AH^2.HB^2 = (AE.AM).(BF.BM) = (AM.BM).AE.BF = MH.AB.AE.BF$

$\Rightarrow MH^3 = AB.AE.F$

d) Tứ giác MEHF có $\widehat{M} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^o$ nên là hình chữ nhật. Gọi D là giao điểm của MH và EF $\Rightarrow$ EF = MH; DE = DH (Tính chất đường chéo hình chữ nhật)

Xét ΔDEI và ΔDHI, có: EI = HI, DI chung, DE = DH

$\Rightarrow \Delta DEI = \Delta DHI \Rightarrow \widehat{DEI} = \widehat{DHI} = 90^o$

CMTT ta có: $\widehat{DFJ} = \widehat{DHJ} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{JFE} = 90^o \Rightarrow$ Tứ giác IEFJ là hình thang vuông

$\Rightarrow$ Diện tích tứ giác IEFJ: $S_{IEFJ} = \dfrac{(EI + FJ).EF}{2}$

Mà $EI = \dfrac{1}{2}\cdot AH; FJ = \dfrac{1}{2}\cdot HB \Rightarrow S_{IEFJ} = \dfrac{(\frac{AH}{2} + \frac{HB}{2}).EF}{2} = \dfrac{AB.EF}{4} = \dfrac{2R.MH}{4} = \dfrac{R.MH}{2}$

Diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất khi và chỉ khi MH lớn nhất $\Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung AB.

Khi đó MH = R $\Rightarrow S_{IEFJ} = \dfrac{R.MH}{2} = \dfrac{R^2}{2}$

Vậy diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất bằng $\dfrac{R^2}{2}$ khi M nằm chính giữa cung AB.

Bài 5 (2 điểm).

a. Cho số tự nhiên n bất kỳ. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 2026n^2 + 1014(n + p)$ luôn viết được dưới dạng hiệu hai số chính phương.
b. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình: $x^2 - 2x = 27y^3$

Lời giải :

a. Giả sử $A = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ với $(a, b \in N^*)$

Do $a - b$ và $a + b$ có cùng tính chẵn lẻ mà $A \vdots 2$ nên $a - b$ và $a + b$ đều là số chẵn

$\Rightarrow (a + b)(a - b) \vdots 4$ hay $A \vdots 4$.

Mặt khác, $A = 2026n^2 + 1014(n + p) = 2028n^2 + 1016(n + p) - 2(n^2 + n + p)$

Vì $A \vdots 4 \Rightarrow 2(n^2 + n + p) \vdots 4 \Rightarrow n^2 + n + p \vdots 2$ mà $n^2 + n = n(n+1) \vdots 2 \ \ \forall n \in N$

$\Rightarrow p \vdots 2$ mà p là số nguyên tố nên $p = 2$.

b. Ta có $x^2 - 2x = 27y^3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 27y^3 + 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = (3y + 1)(9y^2 - 3y + 1) \quad (1)$

Đặt $(3y+1;9y^2-3y+1)=d\ \ (d\in N^*)$

$\Rightarrow 9y^2-3y+1-3y(3y+1)\vdots d$

$\Rightarrow -6y+1\vdots d$ mà $6y+2\vdots d$ nên $3\vdots d\Rightarrow d\in\{1;3\}$

Mặt khác, $3y+1$ không chia hết cho 3 nên $d=1\Rightarrow(3y+1;9y^2-3y+1)=1$

Khi đó từ (1) suy ra ta có: $\begin{cases}3y+1=a^2\\9y^2-3y+1=b^2\end{cases}(a,b\in N^*)$

$\Rightarrow b^2=(a^2-1)^2-(a^2-1)+1$

$\Leftrightarrow b^2=a^4-3a^2+3\Leftrightarrow 4b^2=4a^4-12a^2+12$

$\Leftrightarrow 4b^2=(2a^2-3)^2+3$

$\Leftrightarrow 3=(2b-2a^2+3)(2b+2a^2-3)$

Mà $2b+2a^2-3>0\ do\ \ a,b\in N^*$

Ta có bảng giá trị sau:

$2b-2a^2+3$	1	3
$2b+2a^2-3$	3	1
a	$\sqrt{2}$	1
b	1	1

Từ bảng trên ta thấy $a=b=1\Rightarrow\ y=0$

$\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vậy cặp $(x;y)$ thoả mãn là: $(0;0)$; $(2;0)$