

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH  
QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC: 2019 - 2020

Ngày thi: 06/12/2019

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

**Câu 1: (5,0 điểm).**

a) Giải hệ phương trình sau (với  $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} y + \sqrt{x^2 y + 2x^2 + 2y + 4} = 2x^2 + 2 \\ 6y^2 + 2yx^2 = 6y + x \end{cases}$$

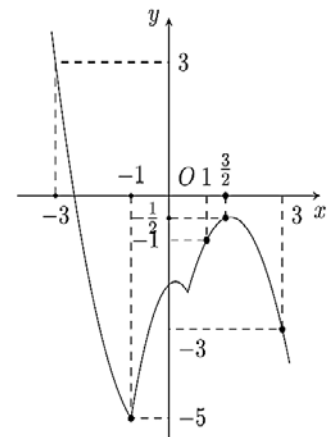
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2

$$9.3^{x^2-2x} + (2m+11).3^{-x^2+2x-2} - 4m + 2 = 0.$$

**Câu 2: (5,0 điểm).**

a) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và hàm  $f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$g(x) = \frac{1}{2}f(2x-1) + x^2 - x + 2019.$$



b) Anh Giàu hàng tháng gửi vào ngân hàng 5 triệu đồng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,65% / tháng. Tính tổng số tiền anh Giàu nhận được khi gửi được 20 tháng.

**Câu 3: (5,0 điểm).**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có hai mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(SAC)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ ,  $SB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $\alpha$ .

a) Tính theo  $a$  và  $\alpha$  thể tích khối chóp  $G.ANC$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ ,  $N$  là trung điểm  $BC$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tìm giá trị của  $\alpha$  để khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN, SC$  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 4: (3,0 điểm).**

Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

**Câu 5: (2,0 điểm).**

Cho hàm số  $f(x) = 2019^x - 2019^{-x}$ . Các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a + b > 0$  và  $f(a^2 + b^2 + ab + 2) + f(-9a - 9b) = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{4a + 3b + 1}{a + b + 10}$  khi  $a, b$  thay đổi.

.....HẾT.....

**Ghi chú:** Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b>	<p>a) Giải hệ phương trình sau (với <math>x, y \in \mathbb{R}</math>)</p> $\begin{cases} y + \sqrt{x^2 y + 2x^2 + 2y + 4} = 2x^2 + 2 \\ 6y^2 + 2yx^2 = 6y + x. \end{cases}$ <p>b) Tìm tất cả các giá trị của tham số <math>m</math> để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2</p> $9 \cdot 3^{x^2 - 2x} + (2m + 11) \cdot 3^{-x^2 + 2x - 2} - 4m + 2 = 0$	<b>5,0 đ</b>
<b>1.a</b>	<p>Điều kiện <math>y \geq -2</math>.</p> <p>Ta có</p> $y + \sqrt{x^2 y + 2x^2 + 2y + 4} = 2x^2 + 2$ $\Leftrightarrow (\sqrt{y + 2} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{y + 2} + 2\sqrt{x^2 + 2}) = 0$	<b>1,0</b>
	<p>Do đó <math>y = x^2</math>, thay vào phương trình sau ta được <math>8x^4 + 6x^3 - x = 0</math></p> <p>Suy ra <math>\begin{cases} x = 0 \\ 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \end{cases}</math></p>	<b>0,75</b>
	<p>Ta thấy phương trình có ba nghiệm thuộc đoạn <math>[-1; 1]</math> (dùng đồ thị hàm số).</p>	<b>0,5</b>
	<p>Với <math>-1 \leq x \leq 1</math> ta đặt <math>x = \cos t</math> (với <math>t \in [0; \pi]</math>), phương trình trở thành <math>\cos 3t = \frac{1}{2}</math> suy ra <math>t = \frac{\pi}{9}, t = \frac{5\pi}{9}, t = \frac{7\pi}{9}</math></p> <p>Như vậy hệ có nghiệm <math>(0; 0), \left(\cos \frac{\pi}{9}; \cos^2 \frac{\pi}{9}\right), \left(\cos \frac{5\pi}{9}; \cos^2 \frac{5\pi}{9}\right), \left(\cos \frac{7\pi}{9}; \cos^2 \frac{7\pi}{9}\right)</math></p>	<b>0,75</b>

<b>2.b</b>	<p>Viết lại phương trình <math>3^{x^2-2x+2} + \frac{2m+11}{3^{x^2-2x+2}} - 4m + 2 = 0</math> (1)</p> <p style="text-align: center;">Đặt <math>t = 3^{x^2-2x+2}</math>.</p> <p>Xét <math>t' = (2x-2x).3^{x^2-2x+2} \cdot \ln 3</math></p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>2</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>t'</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>t</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>3</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>9</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$t'$		-	+	$t$	$+\infty$	$3$	$9$	<b>0,5</b>
$x$	$-\infty$	$1$	$2$											
$t'$		-	+											
$t$	$+\infty$	$3$	$9$											
	<p>Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị <math>t_0 \in (3;9)</math> thì phương trình <math>3^{x^2-2x+2} = t_0</math> có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.</p> <p>+ Phương trình (1) trở thành <math>t^2 + 2(1-2m)t + 2m + 11 = 0</math></p> $\Leftrightarrow \frac{t^2 + 2t + 11}{2t - 1} = 2m \quad (2).$	<b>0,5</b>												
	<p>+ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt <math>t_1, t_2</math> thuộc khoảng <math>(3;9)</math>.</p> <p>+ <math>f(t) = \frac{t^2 + 2t + 11}{2t - 1}, t \in (3;9). f'(t) = \frac{2t^2 - 2t - 24}{(2t - 1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 4 \end{cases}</math></p>	<b>0,5</b>												
	<p>Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>t</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>3</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>4</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>9</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f'(t)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(t)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{26}{5}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>5</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{110}{17}</math></td> </tr> </table> <p>Từ bảng biến thiên suy ra (2) có hai nghiệm phân biệt <math>t_1, t_2</math> thuộc khoảng <math>(3;9)</math> khi</p> $5 < 2m < \frac{26}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{13}{5}.$	$t$	$3$	$4$	$9$	$f'(t)$		-	+	$f(t)$	$\frac{26}{5}$	$5$	$\frac{110}{17}$	<b>0,5</b>
$t$	$3$	$4$	$9$											
$f'(t)$		-	+											
$f(t)$	$\frac{26}{5}$	$5$	$\frac{110}{17}$											
<b>2</b>	<p><b>a)</b> Cho hàm số <math>f(x)</math> có đạo hàm trên <math>\mathbb{R}</math> và hàm <math>f'(x)</math> có đồ thị như hình bên. Tìm các điểm cực trị của hàm số</p> <p><math>g(x) = \frac{1}{2} f(2x-1) + x^2 - x + 2019.</math></p> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> </div>	<b>5,0 điểm</b>												
	<b>b)</b> Anh Giàu hàng tháng gửi vào ngân hàng 5 triệu đồng theo thẻ thức lãi kép, kì hạn													

	1 tháng với lãi suất 0,65% / tháng. Tính tổng số tiền anh Giàu nhận được khi gửi được 20 tháng.																		
<b>2a</b> <b>(3,0đ)</b>	Ta có $g'(x) = f'(2x-1) + 2x-1$	<b>1,0</b>																	
	Suy ra $g'(x) = 0$ khi $2x-1=3, 2x-1=1$ hoặc $2x-1=3$ hay $x = -1, x = 1, x = 2$ .	<b>1,0</b>																	
	<p>Do đó bảng biến thiên của hàm số</p> <table border="1" data-bbox="338 846 1145 1077"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-1</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td></td> <td><math>g(-1)</math></td> <td><math>g(1)</math></td> <td><math>g(2)</math></td> <td></td> </tr> </table> <p>Suy ra <math>x = 1</math> là điểm cực tiểu; <math>x = -1, x = 2</math> là các điểm cực đại của hàm số.</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$	$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$	$y$		$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$	
$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$														
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$														
$y$		$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$															

<p><b>2.b</b> <b>(2,0đ)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Cuối tháng thứ 1</b>, ông Giàu có số tiền là: <math>P_1 = a + a.r = a(1+r)</math></li> <li>• <b>Đầu tháng thứ 2</b>, ông Giàu có số tiền là:  <math>P_1 + a = a(1+r) + a = a + a(1+r) = a[1 + (1+r)]</math>.....</li> <li>• <b>Cuối tháng thứ 2</b>, ông Giàu có số tiền là:  <math>P_2 = P_1 + P_1.r = a + a(1+r) + [a + a(1+r)] = a[(1+r)^2 + (1+r)]</math></li> <li>• <b>Đầu tháng thứ 3</b>, ông Giàu có số tiền là:  <math>P_2 + a = a[(1+r)^2 + (1+r)] + a = a[1 + (1+r) + (1+r)^2]</math></li> <li>• <b>Cuối tháng thứ 3</b>, ông Giàu có số tiền là:  <math>P_3 = P_2 + P_2.r = a[1 + (1+r) + (1+r)^2] + a[1 + (1+r) + (1+r)^2].r</math>  <math>= a[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]</math>.....</li> <li>• <b>Cuối tháng thứ n</b>, ông Giàu có số tiền là:  <math display="block">P_n = a \left[ (1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)^2 + (1+r) \right]</math> <math display="block">\Leftrightarrow P_n = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (3)</math></li> </ul> <p>Vậy sau 20 tháng anh Giàu nhận được tổng số tiền</p> $5(1+0,65\%) \cdot \frac{(1+0,65\%)^{20} - 1}{0,65\%} \text{ triệu}$	<p style="text-align: right;"><b>0,5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>0,5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>1,0</b></p>
-------------------------------------	---	--

<p><b>3</b></p>	<p>Cho hình chóp <math>S.ABC</math> có hai mặt phẳng <math>(SAB)</math>, <math>(SAC)</math> cùng vuông góc với mặt phẳng <math>(ABC)</math>, tam giác <math>ABC</math> vuông cân tại <math>B</math>, <math>SB = a</math>, góc giữa hai mặt phẳng <math>(SBC)</math> và <math>(ABC)</math> bằng <math>\alpha</math>.</p> <p>a) Tính theo <math>a</math> và <math>\alpha</math> thể tích khối chóp <math>G.ANC</math> với <math>G</math> là trọng tâm tam giác <math>SBC</math>, <math>N</math> là trung điểm <math>BC</math>.</p> <p>b) Gọi <math>M</math> là trung điểm <math>AC</math>. Tìm giá trị của <math>\alpha</math> để khoảng cách giữa hai đường thẳng <math>MN</math>, <math>SC</math> đạt giá trị lớn nhất.</p>	<p><b>5,0</b></p>
<p><b>3a</b> <b>(3,0đ)</b></p>	<p>Để thấy, <math>SA \perp mp(ABC)</math>, <math>\alpha = \widehat{SBA}</math> và <math>d(G, (ABC)) = \frac{1}{3}d(S, (ABC))</math></p> <hr/> <p><math>S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC}</math>, <math>SA = a \sin \alpha</math>, <math>AB = a \cos \alpha</math>.</p> <hr/> <p>Do đó <math>V_{S.ANC} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3}SA \right) \left( \frac{1}{2}S_{ABC} \right) = \frac{1}{18} a \sin \alpha \cdot \frac{(a \cos \alpha)^2}{2} = \frac{a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{36}</math>.</p>	<p><b>1,0</b></p> <p><b>1,0</b></p> <p><b>1,0</b></p>
<p><b>3b</b> <b>(2,0)</b></p>	<p>Vẽ hình vuông <math>ABCD</math>, <math>mp(SCD)</math> chứa <math>SC</math> và song song với <math>MN</math> nên</p> $d(MN, SC) = d(MN, (SCD)) = d(M, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{1}{2}AH.$ <hr/> <p>Tam giác <math>SAD</math> có <math>\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2 \sin^2 2\alpha} \Rightarrow AH = \frac{a}{2} \sin 2\alpha \leq \frac{a}{2}</math>.</p> <p>Do đó khoảng cách cần xét lớn nhất khi <math>\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}</math>.</p>	<p><b>1,0</b></p> <p><b>1,0</b></p>
<p><b>Câu 4</b></p>	<p>Gọi <math>S</math> là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ <math>S</math>, tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.</p>	<p><b>3,0</b> <b>điểm</b></p>

	<p>+ Gọi <math>x = \overline{abcd}</math></p> <p>+ Số phần tử không gian mẫu: <math>n(\Omega) = A_9^4</math>.</p> <p>+ <math>x</math> chia hết cho 15 <math>\Leftrightarrow x:3</math> và <math>x:5</math>. Suy ra <math>x = \overline{abc5}</math>.</p>	0,5
	<p>Suy ra <math>x</math> chia hết 15 khi <math>a+b+c</math> chia 3 dư 1.</p> <p>+ Ta tìm tất cả các số có 3 chữ số khác nhau <math>\overline{abc}</math> mà <math>a+b+c</math> chia 3 dư 1.</p> <p>Xét 3 tập <math>A = \{1;4;7\}, B = \{2;8\}, C = \{3;6;9\}</math></p>	0,5
	<p>Th1: 1 số thuộc tập <math>A</math>, 2 số thuộc tập <math>C</math>.</p> <p>Có <math>C_3^1</math> cách chọn một số thuộc tập <math>A</math>, <math>C_3^2</math> cách chọn hai số thuộc tập <math>C</math>. Ta có <math>C_3^1.C_3^2.3!</math> số.</p>	0,5
	<p>Th2: 2 số thuộc tập <math>A</math>, 1 số thuộc tập <math>B</math>.</p> <p>Có <math>C_3^2</math> cách chọn hai số thuộc tập <math>A</math>, 2 cách chọn hai số thuộc tập <math>B</math>. Ta có <math>2.C_3^2.3!</math> số</p>	0,5
	<p>Th 3: 2 số thuộc tập <math>B</math>, 1 số thuộc tập <math>C</math>.</p> <p>Có 1 cách chọn hai số thuộc tập <math>B</math>, <math>C_3^1</math> cách chọn hai số thuộc tập <math>C</math>. Ta có <math>C_3^1.3!</math> số.</p>	0,5
	<p>Gọi <math>D</math> là biến cố “Chọn được số chia hết cho 15”.</p> <p><math>n(D) = C_3^1.C_3^1.3! + 2.C_3^2.3! + C_3^1.3!</math>.</p> $P(D) = \frac{C_3^1.C_3^1.3! + 2.C_3^2.3! + C_3^1.3!}{A_9^4} = \frac{1}{28}$	0,5
<b>Câu 5</b>	<p>Cho hàm số <math>f(x) = 2019^x - 2019^{-x}</math>. Các số thực <math>a, b</math> thỏa mãn <math>a+b &gt; 0</math></p> <p><math>f(a^2 + b^2 + ab + 2) + f(-9a - 9b) = 0</math>. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức <math>P = \frac{4a + 3b + 1}{a + b + 10}</math> khi <math>a, b</math> thay đổi.</p>	(2,0đ)
	<p>Ta có <math>f'(x) = 2019^x \cdot \ln(2019) + 2019^{-x} \cdot \ln(2019) &gt; 0, \forall x \in \mathbb{R}</math>. Suy ra <math>f(x)</math> đồng biến trên <math>\mathbb{R}</math></p> <p>Lại có <math>f(-x) = 2019^{-x} - 2019^x = -f(x)</math>. Suy ra <math>f(x)</math> là hàm số lẻ.</p>	0,5
	<p><math>f(a^2 + b^2 + ab + 2) + f(-9a - 9b) = 0 \Leftrightarrow f(a^2 + b^2 + ab + 2) = -f(-9a - 9b) = f(9a + 9b)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab + 2 = 9a + 9b \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab + 2 - 9a - 9b = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4ab + 8 - 36a - 36b = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (2a + b)^2 - 18(2a + b) + 3(b - 3)^2 - 19 = 0</math>.</p> <p><math>\Leftrightarrow (2a + b)^2 - 18(2a + b) - 19 = -3(b - 3)^2 \leq 0 \dots\dots\dots</math></p> <p><math>\Rightarrow (2a + b)^2 - 18(2a + b) - 19 \leq 0</math></p> <p><math>\Rightarrow -1 \leq 2a + b \leq 19 \Rightarrow 2a + b \leq 19 \Leftrightarrow 2a + b - 19 \leq 0</math>.</p> <p>Mặt khác <math>P - 2 = \frac{2a + b - 19}{a + b + 10} \leq 0 \Rightarrow P \leq 2</math> Dấu bằng xảy ra khi</p> $\begin{cases} 2a + b = 19 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases} \dots\dots\dots$	0,5
		0,5

**Chú ý:**

1. Mọi lời giải đúng, khác với hướng dẫn chấm, đều cho điểm tối đa theo từng câu và từng phần tương ứng.

***2. Tổ chức thảo luận để thống nhất các tình huống làm bài có thể xảy ra của học sinh.***