SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT**
LÀO CAI	**NĂM HỌC 2020 – 2021**
TOANMATH.com	**Môn thi: TOÁN THPT**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Ngày thi: 18/01/2021**
	Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
	Đề thi gồm 01 trang – 05 câu

Câu 1. *(5,0 điểm)*

a) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x) = -\left(x+2\right)\left(x-4\right)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f\left(x^2 - 3x\right)$.

b) Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \left(x+2\right)\left(x-1\right)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|f^2\left(x\right) - 2f\left(x\right) - m\right|$ có 9 điểm cực trị.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x - 2.\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2\left(2x+m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60°.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

b) Lấy các điểm M, P lần lượt thuộc cạnh AD, SC sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{3}{5}$. Gọi N là giao điểm của SD với mặt phẳng $\left(BMP\right)$. Tính thể tích của khối đa diện $SABMNP$.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho tập $S = \left\{1;2;3;\ldots;2016\right\}$.

a) Hỏi có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử khác nhau chọn từ tập S, sao cho 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất độ dài là 1000.

b) Chọn ngẫu nhiên 3 số khác nhau từ tập S. Tính xác suất sao cho 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất độ dài là số chẵn.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

a) Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $xy \ge 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

b) Cho a, b, c là các số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $a \ge b \ge c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+b}\right) + \frac{3a}{a+c}$.

-------------------- HẾT --------------------

https://toanmath.com/

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: . . . . Số báo danh: . . . .

Chữ kí của giám thị 1: . . . . Chữ kí của giám thị 2: . . . .

HỌC HỎI - CHIA SẺ KIẾN THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI - SỞ LÀO CAI
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: Toán 12

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

LINK NHÓM: https://www.facebook.com/groups/1916660125164699

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x) = -(x+2)(x-4)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f\left(x^2 - 3x\right)$.

b) Cho hàm số $y = f(x) = (x+2)(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|$ có 9 điểm cực trị .

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x - 2.\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 1$.

b) Tìm cất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

b) Lấy các điểm M, P lần lượt thuộc các cạnh AD, SC sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{3}{5}$. Gọi N là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMP). Tính thể tích của khối đa diện $S.ABMNP$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tập $S = \{1;2;3;...;2016\}$.

a) Hỏi có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử khác nhau chọn từ tập S sao cho 3 số được chọn là độ dài ba cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất có độ dài là 1000.

b) Chọn ngẫu nhiên 3 số khác nhau từ tập S. Tính xác suất sao cho 3 số được chọn là độ dài ba cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất có độ dài là số chẵn.

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $xy \ge 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

b) Cho a,b,c là các số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $a \ge b \ge c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+b}\right) + \frac{3a}{a+c}$.

------------------------HẾT------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x)=-(x+2)(x-4)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f\left(x^2-3x\right)$.

Lời giải

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=4 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right.$
- Đặt hàm số $g(x)=f(x^2-3x) \to g'(x)=(2x-3).f'\left(x^2-3x\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ x^2-3x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

- Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

- Vậy : Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

  Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

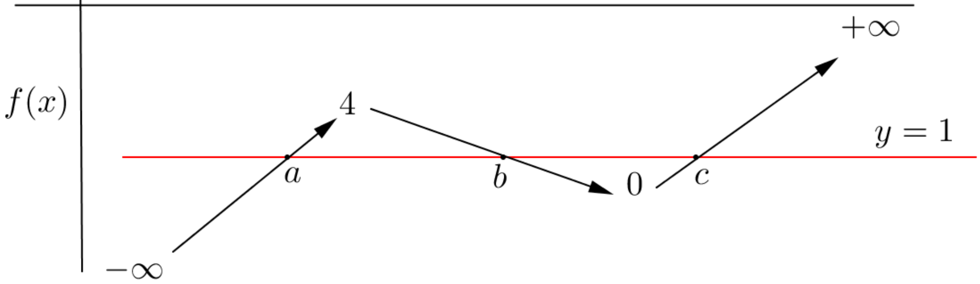
b) Cho hàm số $y=f(x)=(x+2)(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ có 9 điểm cực trị .

Lời giải

- $f'(x)=(x-1)^2+2(x-1)(x+2)=(x-1)(3x+3)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=4 \\ x=1 \ \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

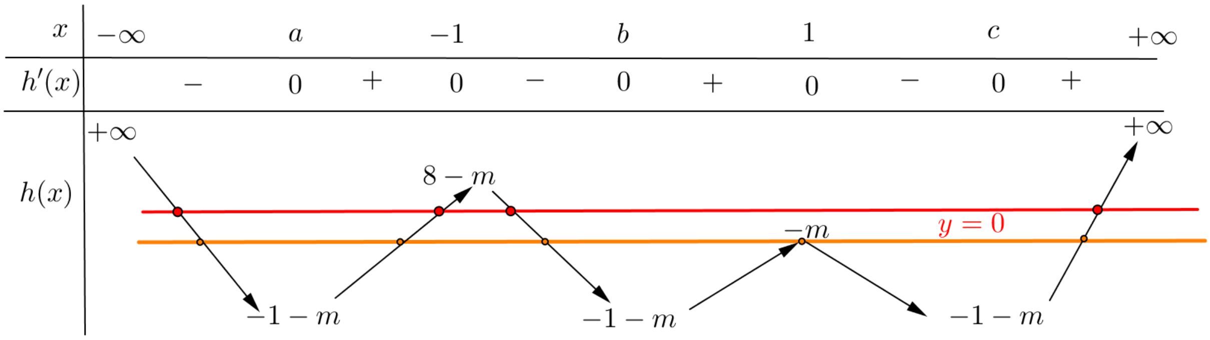


- Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)-2f(x)-m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số

$h(x) = f^2(x) - 2f(x) - m$ và $y = 0$.

$h'(x) = 2f'(x).f(x) - 2f'(x) = 2f'(x).\left(f(x) - 1\right)$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = a \quad (a < -1) \\ x = b \quad (-1 < b < 1) \\ x = c \quad (c > 1) \end{array}\right.$$



◆ Để hàm số $y = g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|$ có 9 điểm cực trị thì điều kiện :

$-m \leq 0 < 8 - m \Leftrightarrow 0 \leq m < 8$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x - 2.\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2\left(2x+m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

a) Giải bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x - 2.\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 1$.

◆ Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x \, (t > 0) \Rightarrow \frac{1}{t} = \left(2-\sqrt{3}\right)^x$, bất phương trình trở thành:

$t - \frac{2}{t} > 1 \Leftrightarrow t^2 - 2 > t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ vì $t > 0$

$\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_{2+\sqrt{3}} 2$

◆ Vậy $S = \left(\log_{2+\sqrt{3}} 2; +\infty\right)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

◆ $\log_2\left(2x+m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{m}{2} \end{cases}$

◆ Ta có: $\log_2\left(2x+m\right) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+1-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+\log_2 2-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(4x+2m)-\log_2 x^2 = x^2-4x-2m$

$\Leftrightarrow \log_2(4x+2m)+4x+2m = x^2+\log_2 x^2$

- Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$ với $t>0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(4x+2m)=f(x^2) \Leftrightarrow 4x+2m=x^2$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{x^2}{2}-2x \ (1)$

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-2x$ với $x>0 \Rightarrow f'(x)=x-2$.

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

- Để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow m\in(-2;0)$.

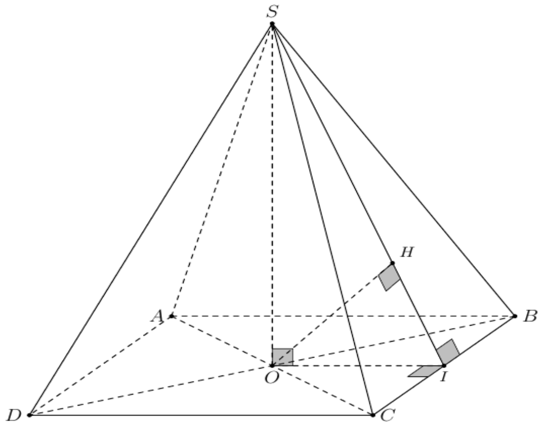
Câu 3. (5,0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

b) Lấy các điểm M, P lần lượt thuộc các cạnh AD, SC sao cho $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{3}{5}$. Gọi N là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMP). Tính thể tích của khối đa diện $S.ABMNP$.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm BC.

- Khi đó ta có $\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp SI$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO}$ hay $\widehat{SIO} = 60°$.

- Trong ΔSIO vuông tại O ta có: $OI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\tan \widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI} \Leftrightarrow SO = OI.\tan \widehat{SIO} = \dfrac{a}{2}.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = a$.

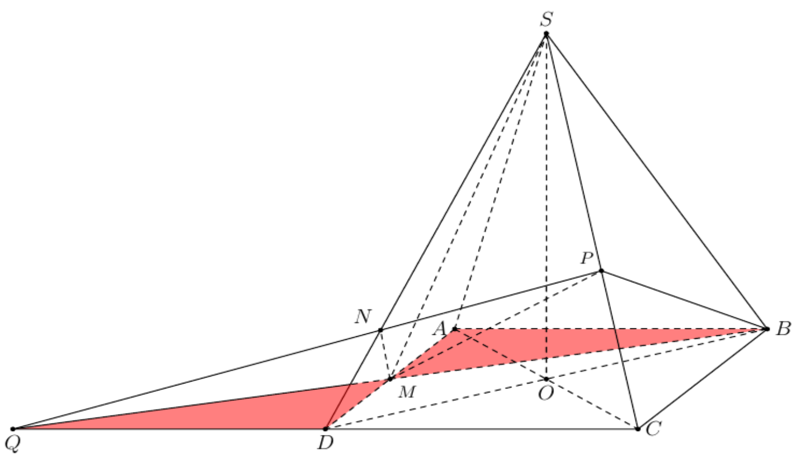
Do $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SBC))$.

- Trong ΔSIO kẻ $OH \perp SI$ (1) với $H \in SI$.
- Do $BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$ (2).
- Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SBC)$. Vậy $\mathrm{d}(O, (SBC)) = OH$.
- Trong ΔSIO vuông tại O ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

- Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Gọi Q là giao điểm của CD và BM.



- Ta có: $\left.\begin{array}{l} Q\in(MBP)\cap(SCD) \\ P\in(MBP)\cap(SCD)\end{array}\right\}\Rightarrow (MBP)\cap(SCD)=PQ$.
- Gọi N là giao điểm của SD và PQ.
- Do $PQ\subset(BMP)\Rightarrow SD\cap(BMP)=N$.
- Trong ΔSCD có P, N, Q thẳng hàng nên theo định lý Menelaus ta có

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QD}}.\frac{\overline{ND}}{\overline{NS}}=1\Leftrightarrow -\frac{3}{2}.2.\frac{\overline{ND}}{\overline{NS}}=1\Leftrightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{NS}}=-\frac{1}{3}.$$

- Thể tích tứ diện $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).
- Ta thấy $\Delta AMB=\Delta DMQ$ (c – g – c) $\Rightarrow S_{\Delta BCQ}=S_{ABCD}=a^2$.

$\mathrm{d}(P,(ABCD))=\frac{2}{5}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\frac{2}{5}.SO=\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

- $\mathrm{V}_{P.QBC}=\frac{1}{3}.\mathrm{d}(P,(ABCD)).S_{\Delta BQC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{5}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$.

$\mathrm{d}(N,(ABCD))=\frac{1}{4}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\frac{1}{4}.SO=\frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

$S_{\Delta MDQ}=S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}.AB.AM=\frac{a^2}{4}$.

$\mathrm{V}_{N.MDQ}=\frac{1}{3}.\mathrm{d}(N,(ABCD)).S_{\Delta MDQ}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{a^2}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

- Thể tích khối đa diện $PNBCDM$ là $V_{PNBCDM}=V_{P.BQC}-V_{N.DQM}=\frac{a^3\sqrt{3}}{15}-\frac{a^3\sqrt{3}}{96}=\frac{9a^3\sqrt{3}}{160}$ (đvtt).

Vậy thể tích khối đa diện $S.ABMNP$ là

$$V_{S.ABMNP}=V_{S.ABCD}-V_{PNBCDM}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}-\frac{9a^3\sqrt{3}}{160}=\frac{53a^3\sqrt{3}}{480} \text{ (đvtt).}$$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tập $S=\{1;2;3;...;2016\}$.

a) Hỏi có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử khác nhau chọn từ tập S sao cho 3 số được chọn là độ dài ba cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất có độ dài là 1000.

b) Chọn ngẫu nhiên 3 số khác nhau từ tập S. Tính xác suất sao cho 3 số được chọn là độ dài ba cạnh của một tam giác mà cạnh lớn nhất có độ dài là số chẵn.

Lời giải

Lời giải tổng quát

- Với mỗi k. Xét tập $S_k=\{1;2;...;k-1\}$. Bài toán trên tương đương với bài toán: "Có bao nhiêu cách chọn 2 phần tử phân biệt của S_k sao cho tổng của chúng lớn hơn k".

Giả sử hai phần tử được chọn là $1\le a<b\le k-1$.

Đặt $s=a+b$. Suy ra $k+1\le s\le 2k-3$. Vậy với mỗi s cố định thì a hoàn toàn xác định khi biết b. Từ điều kiện của a,b ta có

- Nếu s chẵn thì $\frac{s}{2}+1\le b\le k-1$. Suy ra có $k-1-\frac{s}{2}$ cách.

- Nếu s lẻ thì $\frac{s+1}{2} \le b \le k-1$. Suy ra có $k-\frac{s+1}{2}$ cách

Vậy nếu k chẵn thì có

$$P_k = \left(k-\frac{k+2}{2}\right)+\left(k-\frac{k+4}{2}\right)+\cdots+\left(k-\frac{2k-2}{2}\right)$$
$$+\left(k-1-\frac{k+2}{2}\right)+\left(k-1-\frac{k+4}{2}\right)+\cdots+\left(k-1-\frac{2k-2}{2}\right)$$

Rút gọn được $P_k = 2\left[\left(k-\frac{k+2}{2}\right)+\left(k-\frac{k+4}{2}\right)+\cdots+\left(k-\frac{2k-4}{2}\right)\right]+1-\frac{k-4}{2}$

$$=\left[(k-2)+(k-4)+\cdots+4\right]+1-\frac{k-4}{2} = 2\left(\frac{k-2}{2}+\frac{k-4}{2}+\cdots+2+1\right)-\frac{k-2}{2}$$

$$=\left(\frac{k-2}{2}\right)\left(\frac{k-2}{2}+1\right)-\frac{k-2}{2}=\frac{1}{4}(k-2)^2$$

a) Với $k=1000$ ta có 499^2 tập con của S

b) Với $k=2i$ chẵn và thuộc S ta có $B=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{1008}4(i-1)^2=\sum_{i=1}^{1008}(i-1)^2=\frac{1007.1008.(2.1007+1)}{6}$ cách

chọn

Vậy xác suất là $\frac{B}{C_{2016}^3}=\frac{1}{4}$

Trường hợp k lẻ

$$P_k = \left(k-\frac{k+3}{2}\right)+\left(k-\frac{k+5}{2}\right)+\cdots+\left(k-\frac{2k-2}{2}\right)$$
$$+\left(k-1-\frac{k+1}{2}\right)+\left(k-1-\frac{k+3}{2}\right)+\cdots+\left(k-1-\frac{2k-4}{2}\right)$$

Rút gọn được

$$P_k = 2\left[\left(k-\frac{k+3}{2}\right)+\left(k-\frac{k+5}{2}\right)+\cdots+\left(k-\frac{2k-2}{2}\right)\right]$$
$$=\left[(k-3)+(k-5)+\cdots+1\right]=\frac{1}{4}(k-1)(k-3)$$

Vậy số tam giác mà cạnh lớn nhất có độ dài là số lẻ $k=2i+1$ là:

$$C=\sum_{i=1}^{1007}(i^2-i)=\frac{1007.1008.(2.1007+1)}{6}-\frac{1007.1008}{2}$$

Vậy số cách chọn ba số lập thành ba cạnh của tam giác là

$$C=\frac{1007.1008.(2.1007+1)}{3}-\frac{1007.1008}{2}$$

Từ đây có thể tổng quát thay 2016 bằng n bất kì.

Câu 5. **(2,0 điểm)**

a) Cho $x, y>0$ và thỏa mãn $xy \ge 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

Lời giải

- Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)+\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}-x}{(x+1)\left(1+\sqrt{xy}\right)}+\frac{\sqrt{xy}-y}{(y+1)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{y}}{1+y}-\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}.\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{(1+x)(1+y)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}.\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)}{(1+x)(1+y)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)(1+x)(1+y)}\ge 0$$

(luôn đúng với $\forall x,y>0$ và $xy\ge 1$).

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$ hoặc $xy=1$.

b) Cho a,b,c là các số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+b}\right)+\frac{3a}{a+c}$.

Lời giải

- Ta có : $M=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+b}\right)+\frac{3a}{a+c} \Leftrightarrow 2M=\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1}{1+\frac{b}{c}}+\frac{6}{1+\frac{c}{a}}$.

Đặt $\begin{cases} u=\frac{a}{b} \\ v=\frac{b}{c} \end{cases}$, vì $a\ge b\ge c>0$ nên $u\ge v\ge 1$. Suy ra $uv=\frac{a}{c}$.

Thay vào biểu thức trên ta có: $2M=\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}+\frac{6}{1+\frac{1}{uv}}$.

Do $u\ge v\ge 1$ nên $\begin{cases} u+1\le uv+1 \\ v+1\le uv+1 \end{cases}$, suy ra $\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\ge \frac{2}{1+uv}$.

- Khi đó $2M\ge \frac{2}{1+uv}+\frac{6uv}{1+uv} \Leftrightarrow M\ge \frac{1+3uv}{1+uv} \Leftrightarrow M\ge 3-\frac{2}{1+uv}$.

Vì $uv\ge 1 \Leftrightarrow 1+uv\ge 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1+uv}\le 1$, suy ra $M\ge 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng 2 đạt được khi $u=v=1$, tức là $a=b=c$.

-----------------------***HẾT***-----------------------