SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN: TOÁN (THPT)
Ngày thi: 15/01/2022
Thời gian: 180 phút (*Không kể thời gian giao đề*)
(Đề thi gồm: 05 câu, 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{3-x}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho tam giác MNI có trọng tâm nằm trên (C).

b) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x)=x^6(x-2)^3(x^2-8x+m^2-3m-4), \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\dfrac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\le 2$ trên tập số thực.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3\dfrac{2x-1}{27x^2-54x+9m}=3x^2-8x+m-1$ có 2 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 3 (5,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, đường chéo $AC=a$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và (SAD) vuông góc với $(ABCD)$. Biết SA tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 45^0.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

b) Gọi M là trung điểm của SD, lấy điểm N thuộc cạnh SC sao cho $SN=2NC$, gọi P là giao điểm của (AMN) và BC. Tính thể tích khối đa diện $AMNPCD$.

Câu 4 (4,0 *điểm*)

a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{2022}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcdef}$ sao cho $a.b.c.d.e.f=1400$.

Câu 5 (2,0 *điểm*) Cho a,b là những số thực thỏa mãn $a^2-ab+b^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^4+b^4-2}{a^2+b^2+1}$.

……………………HẾT……………………

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2021 – 2022
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. a/ Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{3-x}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của của hai đường tiệm cận của (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho tam giác MNI có trọng tâm nằm trên (C).

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{3}{x}-1}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

$\lim\limits_{x\to3^+} y=-\infty\Rightarrow x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

$\Rightarrow I(3;-1)$ là giao điểm của của hai đường tiệm cận của (C).

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+1}{3-x}=x+m\Leftrightarrow -x^2+(2-m)x+3m-1=0\ (*)$.

Đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt và khác 3

$\Leftrightarrow\begin{cases}-16\neq0\\ m^2+8m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-8)\cup(0;+\infty)$

Đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;x_1+m), N(x_2;x_2+m)$ với x_1,x_2 là nghiệm phương trình $(*)$.

M,N,I tạo thành tam giác khi $m\neq-4$

Tam giác MNI có trọng tâm $G\left(\dfrac{x_1+x_2+3}{3};\dfrac{x_1+x_2+2m-1}{3}\right)=\left(\dfrac{m+1}{3};m-1\right)$

$G\in(C)\Rightarrow m-1=\dfrac{m+4}{8-m}\Rightarrow -m^2+8m-12=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=6\end{array}\right.$.

Vậy $m=2; m=6$.

b/ Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f'(x)=x^6(x-2)^3(x^2-8x+m^2-3m-4), \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ g(x)=x^2-8x+m^2-3m-4=0\ (*)\end{array}\right.$$

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục Oy $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow PT(*)$ có hai nghiệm trái dấu và khác 2 hoặc $PT(*)$ có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương khác 2.

• $PT(*)$ có hai nghiệm trái dấu và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-16\neq 0 \\ m^2-3m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{3\pm\sqrt{73}}{2} \\ m\in(-1;4) \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-1;4)$.

• $PT(*)$ có một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$

Với $m=-1 \Rightarrow x^2-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=8>0 \end{array}\right.$. Vậy $m=-1$.

Với $m=4 \Rightarrow x^2-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=8>0 \end{array}\right.$. Vậy $m=4$.

Vậy $m\in[-1;4]$.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\dfrac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\leq 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3\dfrac{2x-1}{27x^2-54x+9m}=3x^2-8x+m-1$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

a) Điều kiện: $6^x\neq 4^x \Leftrightarrow x\neq 0$.

Ta có: $\dfrac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-3}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}\leq 2$. Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$ và $t\neq 1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{2t-3}{1-\dfrac{1}{t}}\leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{2t^2-5t+2}{t-1}\leq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t\leq\dfrac{1}{2} \\ 1<t\leq 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2} \\ 0<x\leq\log_{\frac{3}{2}}2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(0;\log_{\frac{3}{2}}2\right]$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 3x^2-6x+m>0 \end{cases}$

$$\log_3\frac{2x-1}{27x^2-54x+9m}=3x^2-8x+m-1$$
$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)-\log_3(3x^2-6x+m)=3x^2-8x+m+1\ (*)$$

Đặt $u=3x^2-6x+m, v=2x-1\,(u>0,v>0)$.

Khi đó phương trình $(*)$ tương đương: $\log_3 u+u=\log_3 v+v$.

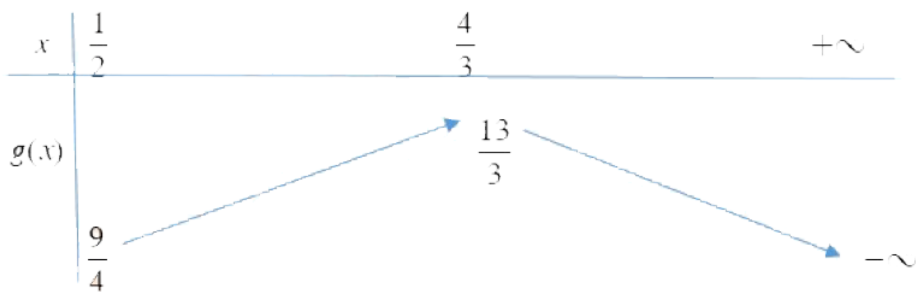
Vì hàm số $y=f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$\log_3 u + u = \log_3 v + v \Rightarrow u = v$.

Suy ra $3x^2 - 6x + m = 2x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 8x + m + 1 = 0$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình : $3x^2 - 8x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $3x^2 - 8x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3x^2 + 8x - 1$. Xét hàm số $g(x) = -3x^2 + 8x - 1$ có bảng biến thiên sau



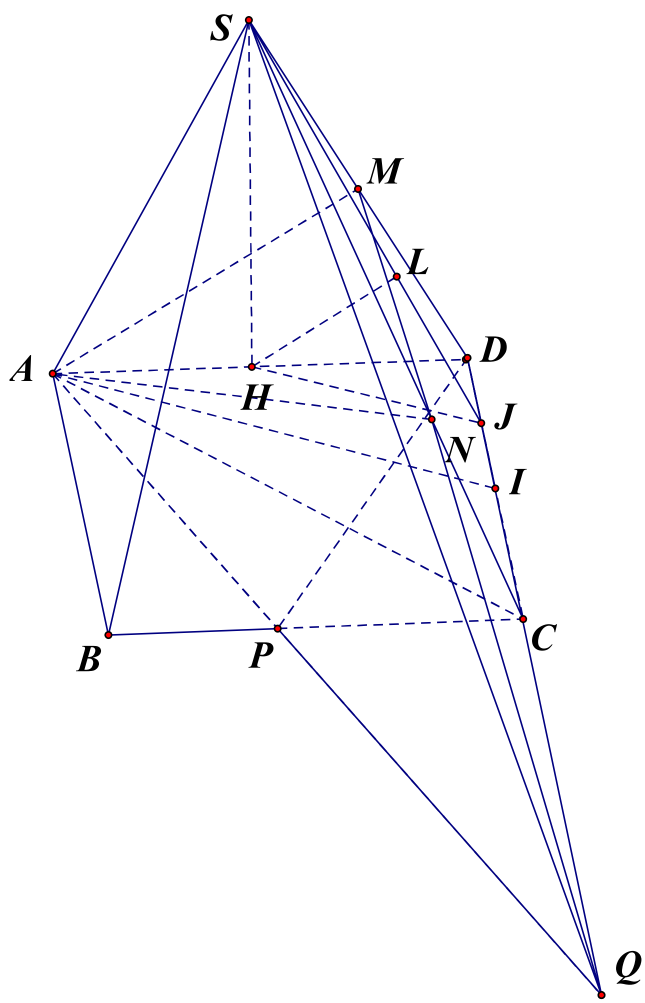
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi $\frac{9}{4} < m < \frac{13}{3}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, đường chéo $AC = a$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và $(SAD) \perp (ABCD)$. Biết SA tạo với đáy một góc bằng 45°.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

b) Gọi M là trung điểm SD, lấy điểm N thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2NC$, gọi P là giao điểm của (AMN) với BC. Tính thể tích khối đa diện $AMNPCD$.

Lời giải:



a) Gọi H là trung điểm AD.

Suy ra $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA;(ABCD))} = \widehat{SAH} \Rightarrow \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow SH = AH = \frac{a}{2}$.

Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(AB;SC) = d(AB;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD))$.

Đáy là hình thoi cạnh bằng a, đường chéo $AC = a$ nên tam giác ACD đều.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm $CD,\ ID$. Khi đó $HJ \perp CD$.

Gọi L là hình chiếu của H lên cạnh SJ. Khi đó ta chứng minh được $HL \perp (SCD)$.

Do đó $d(H;(SCD)) = HL \Rightarrow d(AB;SC) = 2HL = \sqrt{\frac{HS^2.HJ^2}{HS^2 + HJ^2}} = \sqrt{\frac{HS^2.\left(\frac{1}{2}AI\right)^2}{HS^2 + \left(\frac{1}{2}AI\right)^2}}$.

Ta có tam giác ACD đều cạnh bằng a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(AB;SC) = 2\sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

b) Gọi $Q = MN \cap CD \Rightarrow P = BC \cap AQ$.

Trong tam giác SDQ có $MS = MD,\ SN = 2NC$ nên N là trọng tâm tam giác SDQ.

Suy ra $CD = CQ, PQ = PA$.

Ta có $\dfrac{V_{QPNC}}{V_{QAMD}}=\dfrac{QP}{QA}.\dfrac{QN}{QM}.\dfrac{QC}{QD}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{AMNPDC}=\dfrac{5}{6}V_{QAMD}$.

Lại có $V_{MADQ}=\dfrac{1}{2}V_{SADQ}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SH.S_{AQD}=\dfrac{1}{6}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Vậy $V_{AMNPDC}=\dfrac{5}{6}V_{QAMD}=\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{144}$.

Câu 4. a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{2002}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcdef}$ sao cho $a.b.c.d.e.f=1400$.

Lời giải

a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{2002}$.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{2002}$ là: $T_{k+1}=C_{2002}^{k}2^{\frac{2002-k}{2}}5^{\frac{k}{3}}$.

Để $T_{k+1}=C_{2002}^{k}2^{\frac{2002-k}{2}}5^{\frac{k}{3}}$ là số nguyên thì ta có: $\begin{cases}\dfrac{k}{3}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{2002-k}{2}\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=3n\le 2022\\ k=2m\le 2022\end{cases}(m,n\in\mathbb{N})$.

Từ đó ta suy ra $\begin{cases}n=2p\\ 0\le 2p\le 674\end{cases},p\in\mathbb{N}$.

Vậy có $\dfrac{674}{2}+1=338$ số p thoả mãn tức là có 338 số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{2002}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcdef}$ sao cho $a.b.c.d.e.f=1400$.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=9.10^5$.

Gọi X là biến cố lấy được số có dạng $\overline{abcdef}$ sao cho $a.b.c.d.e.f=1400$.

Ta có $1400=2^3.5^2.7=2.4.5^2.7.1=8.5^2.7.1.1$.

Trường hợp 1: a,b,c,d,e,f là 1 trong 6 số: $2,2,2,5,5,7$ có $\dfrac{6!}{3!.2!.1!}=120$ số $\overline{abcdef}$.

Trường hợp 2: a,b,c,d,e,f là 1 trong 6 số: $2,4,5,5,7,1$ có $\dfrac{6!}{1!.1!.1!2!.1!}=360$ số $\overline{abcdef}$.

Trường hợp 3: a,b,c,d,e,f là 1 trong 6 số: $8,5,5,7,1,1$ có $\dfrac{6!}{2!2!.1!.1!}=180$ số $\overline{abcdef}$.

Vậy số phần tử của tập X là $n(X)=120+360+180=660$.

Xác suất của biến cố X là $P(X)=\dfrac{660}{9.10^5}=\dfrac{22}{3.10^4}$.

Câu 5 (2,0 điểm) Cho a,b là những số thực thỏa mãn $a^2-ab+b^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^4+b^4-2}{a^2+b^2+1}$.

Lời giải:

Theo giả thiết: $a^2-ab+b^2=1 \Leftrightarrow (a+b)^2-3ab=1$ (1).

Đặt $\begin{cases} s=a+b \\ p=ab \end{cases}$. Điều kiện: $s^2 \ge 4p$.

Khi đó (1) trở thành: $s^2-3p=1 \Leftrightarrow s^2=3p+1 \ge 0 \Leftrightarrow p \ge -\frac{1}{3}$.

Mà $s^2 \ge 4p$ nên $3p+1 \ge 4p \Leftrightarrow p \le 1$.

Ta có: $a^2-ab+b^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1+ab$.

$$a^4+b^4-2=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2-2=(1+ab)^2-2(ab)^2-2.$$

Suy ra $P=\dfrac{(1+ab)^2-2(ab)^2-2}{1+ab+1}=\dfrac{(1+p)^2-2p^2-2}{p+2}=\dfrac{-p^2+2p-1}{p+2}=-\dfrac{(p-1)^2}{p+2}$.

Xét hàm số $f(p)=-\dfrac{(p-1)^2}{p+2}$ với $-\frac{1}{3} \le p \le 1$.

$$f'(p)=-\frac{2(p-1)(p+2)-(p-1)^2}{(p+2)^2}=-\frac{2\left(p^2+p-2\right)-p^2+2p-1}{(p+2)^2}=\frac{-p^2-4p+5}{(p+2)^2}.$$

$$f'(p)=0 \Leftrightarrow -p^2-4p+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=1 \\ p=-5 \notin \left[-\frac{1}{3};1\right] \end{array}\right.$$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{16}{15}$ và $f(1)=0$.

Suy ra: Giá trị lớn nhất của P là 0 khi $\begin{cases} ab=1 \\ a+b=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-1 \end{array}\right.$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{16}{15}$ khi $\begin{cases} ab=-\frac{1}{3} \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

------------- *Hết* -------------