

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 VÒNG I
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI AMSTERDAM

NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: Toán

Ngày thi: 14/09/2023

Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I. (5,0 điểm)

1) Với các số thực a, b, c thỏa mãn a khác b và $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2024$, tính giá trị của biểu thức $P = c^2(a+b)$.

2) Giải phương trình $x^2 - 3x + 10 = 4\sqrt{x+2}$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Với các số nguyên dương a, b thỏa mãn $3a+4b$ và $4a+3b$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $a+b$ chia hết cho 7.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = (x-y)(xy+2) - 10$.

Bài III. (3,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên thỏa mãn $P(1+\sqrt{2})=0$, chứng minh rằng $P(1-\sqrt{2})=0$.

2) Với các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=2024$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab+bc+cd$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N và trên cạnh BC lấy các điểm P, Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình vuông. Gọi E là giao điểm của CM với PN , F là giao điểm của BN với MQ .

1) Chứng minh rằng đường thẳng PF song song với đường thẳng CM .

2) Lấy điểm G trên đoạn thẳng MN sao cho $GM = QF$. Chứng minh: Tam giác GEF cân và đường thẳng AG vuông góc với đường thẳng EF .

3) Đường thẳng qua Q song song với GE cắt đường thẳng qua P song song với GF tại S , các đường thẳng SM, SN cắt BC lần lượt tại K, L . Chứng minh: $KL^2 = QK \cdot PL$.

Bài V. (1,0 điểm)

Một tập con A của tập hợp các số nguyên dương được gọi là *tập tốt* nếu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập A chứa ít nhất 2 phần tử.

ii) Phần tử lớn nhất của tập A là 2023.

iii) Với mọi cặp phần tử $a, b \in A$ mà $a > b$, ta luôn có $\frac{a-b}{(a,b)} \in A$, trong đó (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b .

1) Chỉ ra một *tập tốt* có nhiều phần tử nhất.

2) Xác định tất cả các *tập tốt*.

-----HẾT-----