SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA - VŨNG TÀU

ĐỀ THI OLYMPIC 27 THÁNG 4 LỚP 10, 11
NĂM HỌC 2022-2023

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

MÔN: Toán, Lớp 10
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 07/3/2023

Câu 1 (2,0 điểm). Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{3x^2+5x+m}=2x+1\ .$$

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Một nhà máy sử dụng ba dây chuyền để sản xuất bánh kẹo và cho ra thị trường hai sản phẩm: gồm loại 1 và loại 2 trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm loại 1 cần sử dụng dây chuyền I trong 1 giờ, dây chuyền II trong 2 giờ và dây chuyền III trong 3 giờ, đồng thời nhà máy thu về khoản lợi nhuận 40 triệu đồng. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm loại 2 cần sử dụng dây chuyền I trong 6 giờ, dây chuyền II trong 3 giờ và dây chuyền III trong 2 giờ, đồng thời nhà máy thu về khoản lợi nhuận 30 triệu đồng. Biết rằng dây chuyền I hoạt động không quá 36 giờ, dây chuyền II hoạt động không quá 23 giờ và dây chuyền III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập phương án sản xuất cho nhà máy để tiền lãi thu được nhiều nhất.

2) Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà trong các số lập được mỗi chữ số có mặt không quá hai lần.

Câu 3 (4,0 điểm).

1) Giải phương trình $\left(x^2+6x+13\right)\left(3\sqrt{5x+9}-2\sqrt{3x+4}\right)=33x+65$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x^2+6x=y^3-6y^2+15y-18 \\ 3\sqrt{4y-7}+4(y-2)\sqrt{3x+1}=3x^2+10x+12 \end{cases}$

Câu 4 (4,0 điểm).

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1,\ AC=\sqrt{3}$. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt BM tại I. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}+6\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

2) Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I và độ dài ba cạnh $AB=c, AC=b, BC=a$ thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{3}\left(IA+IB+IC\right)$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến BM. Điểm A thuộc đường thẳng $d: 2x+3y-5=0$, đường thẳng BM đi qua $D(23;-2)$. Biết rằng $H(0;-3)$, $I(2;1)$ là trung điểm cạnh AB và B có tọa độ là các số nguyên.

1) Tìm tọa độ điểm các điểm A và B.

2) Tính diện tích tam giác DAC.

Câu 6 (4,0 điểm).

1) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{3}{2}.$$

2) Cho bộ ba số thực không đồng thời bằng nhau $(a;b;c)$. Người ta thực hiện liên tiếp các thao tác thay bộ ba số đang có thành bộ ba số mới. Mỗi lần từ bộ ba số $(x;y;z)$ đang có sẽ được thay bởi bộ số $(x-y;y-z;z-x)$. Chứng minh rằng từ bộ số $(a;b;c)$, sau hữu hạn bước thực hiện theo quy tắc đã cho, trong bộ ba số thu được sẽ có ít nhất một số lớn hơn 100.

..........HẾT...........

Lời giải tham khảo

Nhóm học sinh Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa – Vũng Tàu

Bài 1 (2.0 điểm): Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{3x^2+5x+m}=2x+1$$

Lời giải:

$\sqrt{3x^2+5x+m}=2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{-1}{2} \\ 3x^2+5x+m=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{-1}{2} \\ x^2-x+1=m \quad (1) \end{cases}$$

Xét $f(x)=x^2-x+1 \quad \left(x \ge \dfrac{-1}{2}\right)$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x^2-x+1		$\frac{7}{4}$ $\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{3}{4};\dfrac{7}{4}\right]$

Bài 2 (4.0 điểm).

1) Một nhà máy sử dụng ba dây chuyền để sản xuất bánh kẹo và cho ra thị trường hai sản phẩm gồm loại 1 và loại 2 trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm loại 1 cần sử dụng dây chuyền *I* trong 1 giờ, dây chuyền *II* trong 2 giờ và dây chuyền *III* trong 3 giờ, đồng thời nhà máy thu về khoản lợi nhuận 40 triệu đồng. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm loại 2 cần sử dụng dây chuyền *I* trong 6 giờ, dây chuyền *II* trong 3 giờ và dây chuyền *III* trong 2 giờ, đồng thời nhà máy thu về khoản lợi nhuận 30 triệu đồng. Biết rằng dây chuyền *I* hoạt động không quá 36 giờ, dây chuyền *II* hoạt động không quá 23 giờ và dây chuyền *III* hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập phương án sản xuất cho nhà máy để tiền lãi thu được nhiều nhất.

2) Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà trong các số lập được, mỗi chữ số có mặt không quá hai lần.

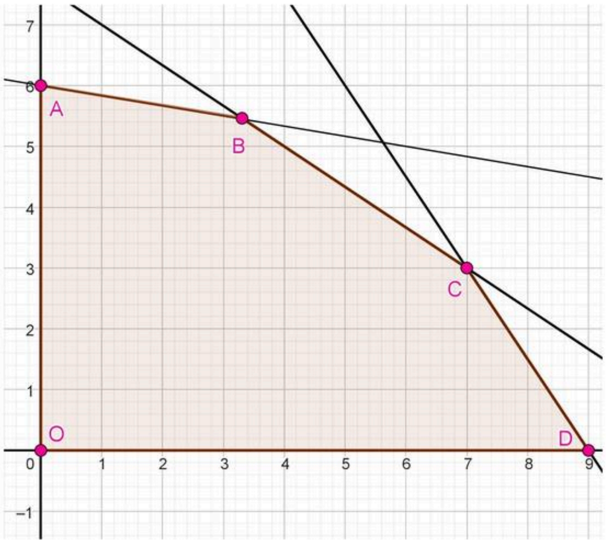
Lời giải:

1) Gọi x,y lần lượt là số tấn sản phẩm I,II được sản xuất $(x,y \ge 0)$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 6y \le 36 \quad (1) \\ 2x + 3y \le 23 \\ 3x + 2y \le 27 \end{cases}$$

Số tiền lãi là $F(x;y) = 40x + 30y$ (triệu đồng)



Miền nghiệm của (1) là miền lục giác $OABCD$ với $O(0;0)$, $A(0;6)$, $B\left(\frac{10}{3};\frac{49}{9}\right)$, $C(7;3)$, $D(9;0)$

Ta có:

$+\ F(0;0) = 0$

$+\ F(0;6) = 180$

$+\ F(7;3) = 370$

$+\ F(9;0) = 360$

$+\ F\left(\frac{10}{3};\frac{49}{9}\right) = \frac{890}{3}$

Vậy để tiền lãi nhà máy thu được là lớn nhất thì nhà máy nên sản xuất lần lượt 7 và 3 tấn sản phẩm loại I, II

2) Số các số có 5 chữ số từ bộ $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ là 9^5 số.

Ta xét các số mà trong đó có chữ số xuất hiện quá 2 lần.

- Trường hợp 1: Số có chữ số xuất hiện 3 lần
- Số cách chọn vị trí 3 số giống nhau là: C_5^3 cách
  - Số cách chọn số đó là 9 cách
- Số cách chọn 2 số còn lại nếu chúng giống nhau: 8 cách
- Số cách chọn 2 số còn lại nếu chúng khác nhau: A_8^2 cách

$\Rightarrow$ Có $C_5^3.9.\left(8 + A_8^2\right)$ số

- Trường hợp 2: Số có chữ số xuất hiện 4 lần
- Số cách chọn vị trí 4 số giống nhau là: C_5^4 cách
  - Số cách chọn số đó là 9 cách
- Số cách chọn số còn lại là: 8 cách

$\Rightarrow$ Có $8.9.C_5^4$ số

- Trường hợp 3: Số có chữ số xuất hiện 5 lần

$\Rightarrow$ Có 9 số

Suy ra: Có $9^5 - C_5^3.9\left(8 + A_8^2\right) - 8.9.C_5^4 - 9 = 52920$ số thỏa mãn đề bài

Bài 3 (4.0 điểm).

1) Giải phương trình $\left(x^2 + 6x + 13\right)\left(3\sqrt{5x+9} - 2\sqrt{3x+4}\right) = 33x + 65$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 6x = y^3 - 6y^2 + 15y - 18 \\ 3\sqrt{4y-7} + 4(y-2)\sqrt{3x+1} = 3x^2 + 10x + 12 \end{cases}$

Lời giải:

1) Ta có:

$$\left(x^2+6x+13\right)\left(3\sqrt{5x+9}-2\sqrt{3x+4}\right)=33x+65 \qquad \text{Điều kiện: } x\ge\frac{-4}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+6x+13\right)\left(\frac{33x+65}{3\sqrt{5x+9}+2\sqrt{3x+4}}\right)=33x+65$$

$$\Leftrightarrow(33x+65)\left(\frac{x^2+6x+13}{3\sqrt{5x+9}+2\sqrt{3x+4}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+13=3\sqrt{5x+9}+2\sqrt{3x+4} \qquad (\text{Do } 33x+65>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x=3\left(\sqrt{5x+9}-(x+3)\right)+2\left(\sqrt{3x+4}-(x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\left(1+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+\frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \ (\text{nhận}) \\ x=-1 \ (\text{nhận}) \\ 1+\dfrac{3}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}+\dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\sqrt{5x+9}\ge0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{5x+9}+x+3>0 \ \ \forall x\ge-\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}>0 \ \ \forall x\ge-\frac{4}{3}$$

Tương tự:

$$\frac{2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}>0 \ \ \forall x\ge-\frac{4}{3}$$

Do đó (1) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S=\{1;0\}$

2) $\begin{cases} x^3+3x^2+6x=y^3-6y^2+15y-18 & (1) \\ 3\sqrt{4y-7}+4(y-2)\sqrt{3x+1}=3x^2+10x+12 & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} y\ge\dfrac{7}{4} \\ x\ge\dfrac{-1}{3} \end{cases}$

Ta có:

$(1)\Leftrightarrow(x+1)^3+3(x+1)=(y-2)^3+3(y-2)$

Đặt: $u=x+1;\ v=y-2$, có:

$(u-v)\left(u^2+uv+v^2+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2+uv+v^2+3=0 \quad (*) \end{array}\right.$

$TH1$: $u^2+uv+v^2+3=0$ có: $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2+3>0\Rightarrow(*)$ vô nghiệm

$TH2$: Với $u=v$, khi đó: $y=x+3$, thay vào (2) có:

$3\sqrt{4x+5}+4(x+1)\sqrt{3x+1}=3x^2+10x+12$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x+5}-3\right)^2+\left(2x+2-2\sqrt{3x+1}\right)^2+2(x-1)^2=0$

Ta có: $\begin{cases}\left(\sqrt{4x+5}-3\right)^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\\ \left(2x+2-2\sqrt{3x+1}\right)^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\\ 2(x-1)^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x+5}-3=0\\ 2x+2-2\sqrt{3x+1}=0\\ x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (nhận)

Suy ra: $y=3+1=4$ (nhận)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $S=\{\,(1;4)\,\}$

Bài 4 (4.0 điểm):

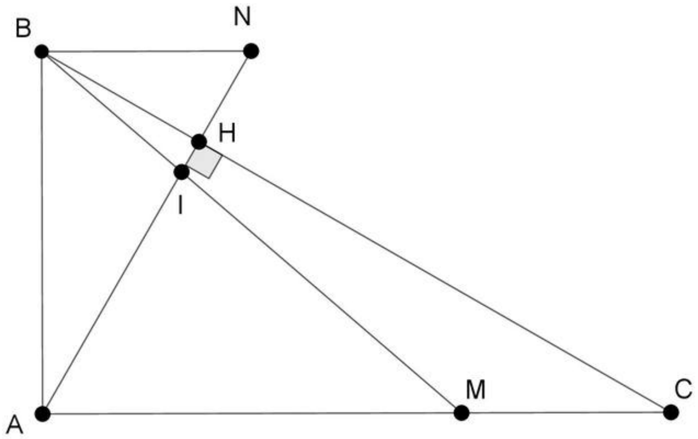
1) Cho ΔABC vuông tại A có $AB=1,\ AC=\sqrt{3}$. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Đường cao AH của ΔABC cắt BM tại I. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+6\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

2) Cho ΔABC có tâm đường trơn nội tiếp I và độ dài ba cạnh $AB=c,\ AC=b,\ BC=a$ thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{3}(IA+IB+IC)$. Chứng minh rằng ΔABC đều.

Lời giải:

1)

Gọi N là điểm thuộc AH sao cho $BN\,//\,AC$



Ta có: $AM=\dfrac{2}{3}.AC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\quad(1)$

$+\ \tan C=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow ACB=30^\circ$

$+\ BAH=HBN=ACB=30^\circ$

$+\ BH=\sin BAH.AB=\sin 30^\circ.1=\dfrac{1}{2}$

$+\ BN=\dfrac{BH}{\cos 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\overline{AM}=2\overline{BN}$

$AC\,//\,BN\Rightarrow\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IB}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=2$

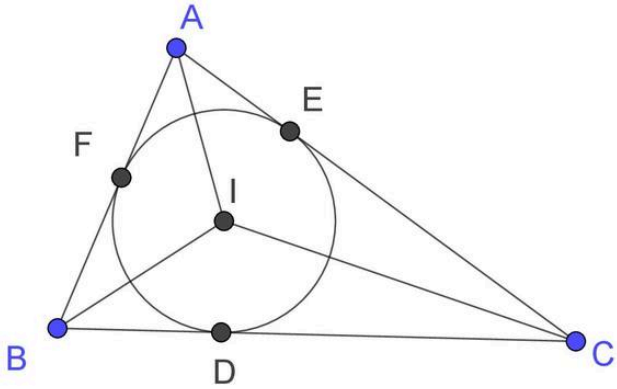
$\Rightarrow 3\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IM}+6\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{IA}+6\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}$

$=9\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ dpcm

2)



Chứng minh bổ đề: $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$

Ta có: $p=AF+BD+CE \Leftrightarrow AF=p-BD-CE=p-a$

Khi đó:

$$+\ IA^2=AF^2+IF^2=(p-a)^2+\left(\frac{S}{p}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow IA^2=\left(p-a\right)^2+\frac{\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{p}=\frac{bc\left(p-a\right)}{p}$$

Tương tự

$$IB^2=\frac{ca\left(p-b\right)}{p};\quad IC^2=\frac{ab\left(p-c\right)}{p}$$

Khi đó: $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=\frac{3p-a-b-c}{p}=1$

Ta có: $1=\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}\geq\frac{\left(IA+IB+IC\right)^2}{ab+bc+ca}$

$$\Leftrightarrow IA+IB+IC\leq\sqrt{ab+bc+ca}\leq\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hay ΔABC đều

Suy ra đpcm

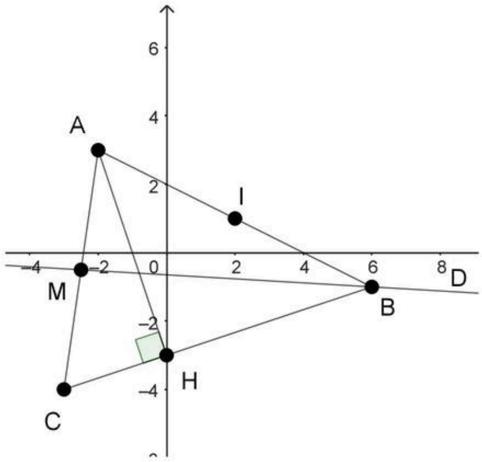
Bài 5 (2.0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có đường cao AH và trung tuyến BM. Điểm A thuộc đường thẳng $d:2x+3y-5=0$ đường thẳng BM đi qua $D\left(23;-2\right)$. Biết rằng $H\left(0;-3\right)$, $I\left(2;1\right)$ là trung điểm cạnh AB và B có tọa độ là các số nguyên.

1) Tìm tọa độ điểm các điểm A và B.

2) Tính diện tích ΔDAC.

Lời giải:



1) $A\in d:2x+3y-5=0\Rightarrow A\left(a;\frac{5-2a}{3}\right)$ với a là hoành độ điểm A

Do $I\left(2;1\right)$ là trung điểm $AB\Rightarrow B\left(4-a;\frac{2a+1}{3}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{HA}=\left(a;\frac{14-2a}{3}\right);\quad \overrightarrow{HB}=\left(4-a;\frac{2a+10}{3}\right)$

Do $HA\perp HB\Leftrightarrow\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=0\Leftrightarrow a\left(4-a\right)+\left(\frac{14-2a}{3}\right)\left(\frac{2a+10}{3}\right)=0\Leftrightarrow a=-2$ (Do tọa độ B nguyên)

Khi đó: $A\left(-2;3\right)$ và $\text{B}\left(6;-1\right)$

2) Phương trình đường thẳng BC: $\frac{x-6}{6-0}=\frac{y-(-1)}{(-1)-(-3)}\Leftrightarrow x-3y-9=0$

Tương tự, phương trình đường thẳng $BM:x+17y+11=0$

Ta có IM là đường thẳng đi qua $I\left(2;1\right)$ và nhận $\vec{u}=\left(1;-3\right)$ làm vecto pháp tuyến

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng $IM:x-3y+1=0$

Vì M là giao điểm của BM và $IM \Rightarrow M\left(\frac{-5}{2};\frac{-1}{2}\right)$

Vì M là trung điểm AC và $C \in BC \Rightarrow C(-3;-4)$

Phường trình đường thẳng $AC: 7x-y+17=0$

Gọi Z là hình chiếu của D trên AC

Ta có: $S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}.AC.DZ=\frac{1}{2}.\sqrt{\left(-2-(-3)\right)^2+\left(3-(-4)\right)^2}.\frac{|7.23-(-2).1+17|}{\sqrt{7^2+1^2}}=90$ (đvdt)

Bài 6 (4.0 điểm):

2) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{3}{2}$$

3) Cho bộ ba số thực không đồng thời bằng nhau $(a;b;c)$. Người ta thực hiện liên tiếp các thao tác thay bộ ba số đang có thành bộ ba số mới. Mỗi lần từ bộ ba số $(x;y;z)$ đang có sẽ được thay bởi bộ số $(x-y;y-z;z-x)$. Chứng minh rằng từ bộ số $(a;b;c)$, sau hữu hạn bước thực hiện theo quy tắc đã cho, trong bộ ba số thu được sẽ có ít nhất một số lớn hơn 100.

Lời giải:

1) Đpcm

$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca+2(a+b+c)+3}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow a+b+c+3\geq 3abc+ab+bc+ca\Leftrightarrow a+b+c+3\geq 4+abc$

$\Leftrightarrow a+b+c\geq 2abc+1\Leftrightarrow a+b+c-2abc\geq 1$

Ta có: $4=abc+ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^3}{27}+\frac{(a+b+c)^2}{3}\Leftrightarrow a+b+c\geq 3$ (do $a+b+c>0$)

Lại có: $4=abc+ab+bc+ca\geq abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}\Leftrightarrow abc\leq 1$

Do đó, suy ra: $a+b+c-2abc\geq 3-2=1$ (đpcm)

2) Ở lần thay đầu tiên, thay bộ số $(a;b;c)\to(a-b;b-c;c-a)$

Nhận thấy rằng bắt đầu từ lần thay thứ 1 trở đi thì tổng ba số trong bộ ba số mới luôn có tổng bằng 0.

Gọi $D_n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là đại lượng có giá trị tổng bình phương ba số được thay lần thứ $n+1$ từ bộ $(a;b;c)$ ban đầu.
Khi đó, ta có: $D_0=x^2+y^2+z^2$

Sau lần thay thứ 2, ta thu được ba số $x-y;y-z;z-x$ và đại lượng D tương ứng là

$D_1=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(a+b+c)^2=3D_0$

Ta thấy rằng sau mỗi lần thực hiện bước thay thì đại lượng D có giá trị tăng gấp 3 lần. Như vậy sau $n+1$ lần thay thì đại lượng $D_n=3^n.D_0$

Bằng quy nạp, ta dễ chứng minh: $3^n > 2n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $D_n > 2nD_0$. Chọn n sao cho $n > \dfrac{3.200^2}{2.D_0}$

$\Rightarrow D_n > 3.200^2$

Giả sử khi đó ta đang có bộ $(m;n';p)$ với $D_n = m^2 + n'^2 + p^2 > 3.200^2$. Do đó, một trong ba số m^2, n'^2, p^2 phải có giá trị lớn hơn 200^2 (do m, n', p không đồng thời bằng nhau).

Không mất tính tổng quát, giả sử $n'^2 > 200^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n' > 200 \\ n' < -200 \end{array}\right.$

+ Nếu $n' > 200 \Rightarrow$ đpcm

+ Nếu $n' < -200 \Rightarrow -n' = m + p > 200 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > 100 \\ p > 100 \end{array}\right. \Rightarrow$ đpcm