

Câu 1(3 điểm).

- a) Giải phương trình: $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$.
- b) Giải phương trình: $(\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{3} \cos 2x = 3$.
- c) Tìm nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của phương trình: $\frac{1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\tan x - \sqrt{3}} = 0$.
- d) Giải phương trình: $\frac{\sin^{20} x + \cos^{20} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 2x + 4\cos^2 2x}$.

Câu 2(1 điểm). Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + 2C_n^1 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 225$.

Câu 3(2 điểm).

- a) Từ các chữ số 1;2;3;4;5;6;7;8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước.
- b) Đội văn nghệ của trường THPT Thanh Miền có 20 học sinh gồm 8 nam và 12 nữ. Nhân dịp ngày nhà giáo Việt Nam 20/11, đoàn trường cần chọn 10 học sinh trong đội để tham gia biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho số học sinh nam không lớn hơn 3.

Câu 4(0,5 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ -\frac{x^3}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{27}y^3 + \frac{3}{2}x - \sqrt{3}y = 2 \end{cases}$$

Câu 5(2,5 điểm). Trong hệ trục tọa độ Oxy cho điểm $M(-2;3)$, đường thẳng d có phương trình $x - y + 2 = 0$, đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

- a) Tìm ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u}(-3;1)$.
- b) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay bằng 90° .
- c) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm M, tỉ số bằng -2 .

Câu 6(1 điểm).

- a) Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y - 3 = 0$ và $d_2: 5x + 2y - 17 = 0$. Đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2 cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B. Viết phương trình đường thẳng d sao cho $\frac{AB^2}{S_{\Delta OAB}^2}$ nhỏ nhất.
- b) Cho a, b, c là các số thực khác nhau thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

-----Hết-----

Họ và tên : Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	- PT : $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,25
	- $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	- Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	0,25
1b	- PT: $(\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{3} \cos 2x = 3 \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2$	0,25
	- $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$	0,25
	- $\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$	0,25
	- $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$	0,25
1c	- ĐK : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$	0,25
	- PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pm 2\pi}{3} + k2\pi.$	
	- Kết hợp với điều kiện có nghiệm $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ - Do nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ nên $x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{7\pi}{4}; x = \frac{2\pi}{3}$	0,25
1d	- Ta có: $\frac{\sin^{20} x + \cos^{20} x}{4} \leq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4} = \frac{1}{4}$ - Và $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 2x + 4 \cos^2 2x} = \frac{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x}{4 - 3 \sin^2 2x} = \frac{1}{4}$ nên VT $\leq \frac{1}{4} = VP$	0,25

	- Dấu bằng khi $\begin{cases} \sin^{20} x = \sin^2 x \\ \cos^{20} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$	0,25
2a	- $C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + 2C_n^1 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 225$ điều kiện $n \geq 3$.	0,25
	- $\Leftrightarrow C_n^1 \cdot C_n^1 + 2C_n^1 C_n^3 + C_n^3 C_n^3 = 225 \Leftrightarrow (C_n^1 + C_n^3)^2 = 225$	0,25
	- $\Rightarrow C_n^1 + C_n^3 = 15$	0,25
	- $\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 15$	0,25
	- Giải được $n = 5$.	0,25
3a	- Mỗi cách chọn 5 chữ số khác nhau từ 8 chữ số đã cho là 1 tổ hợp chập 5 của 8 phần tử.	0,25
	- Số cách chọn 5 chữ số khác nhau từ 8 chữ số trên là $C_8^5 = 56$.	0,25
	- Với mỗi bộ 5 chữ số được chọn đó, sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần ta được 1 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
	- Nên lập được tất cả là 56 số.	0,25
3b	- Số học sinh nam được chọn không lớn hơn 3 nên cần chọn 0,1,2,3 nam.	0,25
	- Số cách chọn 0 nam và 10 nữ là: $C_{12}^{10} = 66$.	0,25
	- Số cách chọn 1 nam và 9 nữ là: $C_8^1 \cdot C_{12}^9 = 1760$.	0,25
	- Số cách chọn 2 nam và 8 nữ là: $C_8^2 \cdot C_{12}^8 = 13860$.	0,25
	- Số cách chọn 3 nam và 7 nữ là: $C_8^3 \cdot C_{12}^7 = 44352$.	0,25
	- Tổng số cách chọn là: $66 + 1760 + 13860 + 44352 = 60038$.	0,25
4	- Phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; đặt $\begin{cases} \frac{x}{2} = \sin t \\ \frac{y}{3} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$	0,25
	- Thay vào PT (2) ta được: $\sin 3t + \sqrt{3} \cdot \cos 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$.	
	- Biểu diễn họ nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 3 điểm ứng với $k = 0; 1; 2$ nên chọn $t = \frac{\pi}{18}; t = \frac{13\pi}{18}; t = \frac{25\pi}{18}$.	
	- Nên hệ có 3 nghiệm $\begin{cases} x = 2 \sin \frac{\pi}{18} \\ y = 3 \cos \frac{\pi}{18} \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \sin \frac{13\pi}{18} \\ y = 3 \cos \frac{13\pi}{18} \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \sin \frac{25\pi}{18} \\ y = 3 \cos \frac{25\pi}{18} \end{cases}$	0,25
5a	- Theo biểu thức tọa độ phép tịnh tiến $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	0,25
	- $M(-2; 3); \vec{u}(-3; 1)$, Gọi M' là ảnh của M thì $M'(-5; 4)$.	0,25
5b	- Lấy $A(0; 2)$ thuộc d thì ảnh của A qua phép quay là $A'(-2; 0)$.	0,25
	- Do góc quay bằng 90° nên $d' \perp d$.	0,25
	- Phương trình d' là: $1(x+2) + 1(y-0) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.	0,25
5c	- Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 4$.	0,25

	<ul style="list-style-type: none"> - Ảnh của tâm I qua phép vị tự là $I'(x; y)$, từ $\overrightarrow{MI'} = -2\overrightarrow{MI} \Rightarrow I'(-10; 15)$. - Đường tròn (C') có bán kính $R' = 2R = 8$. 	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> - Phương trình đường tròn (C') là $(x+10)^2 + (y-15)^2 = 64$. 	0,25
6a	<ul style="list-style-type: none"> - Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và $d_2 \Rightarrow I(3; 1)$. - Giả sử $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ với $a, b > 0$ thì $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. - Vì $I \in d \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> - Ta có $\frac{AB^2}{S_{\Delta OAB}^2} = 4 \cdot \frac{OA^2 + OB^2}{OA^2 \cdot OB^2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \right) = 4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$ - Áp dụng Bunhia: $(3^2 + 1^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{10}$ - Min $\frac{AB^2}{S_{\Delta OAB}^2} = \frac{2}{5}$ khi $\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ 3a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{3} \\ b = 10 \end{cases}$ - Khi đó đường thẳng d có phương trình $3x + y - 10 = 0$. 	0,25
6b	<ul style="list-style-type: none"> - Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a > b > c$. - Khi đó: $A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$. - Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}} (m, n > 0)$ - Ta có: $2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$ $\geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (1)$	0,25
	<p>Lại có: $3(1-b)(1+3b) \leq \frac{(3-3b+1+3b)^2}{4} = 4$ suy ra: $\sqrt{(1-b)(1+3b)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) ta có: $A \geq 10\sqrt{6}$.</p> <p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{6}}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2-\sqrt{6}}{6}$ hoặc các hoán vị.</p> <p>Vậy GTNN của A là $10\sqrt{6}$</p>	0,25