

ĐỀ CHÍNH THỨC

**Bài 1 (5,0 điểm):**

1) Phân tích đa thức thành nhân tử

a)  $x^2 - x - 2022.2023$       b)  $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

2) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

3) Cho  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Biết  $f(x)$  chia cho  $x - 2$  dư 5,  $f(x)$  chia cho  $x + 1$  dư -4. Tính  $M = (a^{2019} + b^{2019})(b^{2021} + c^{2021})(c^{2023} + a^{2023})$

**Bài 2 (4,0 điểm):**

Cho  $A = \left( \frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x - 1} (x \neq 1)$

1) Rút gọn A

2) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

**Bài 3 (4,0 điểm):**

1) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn :

$$x + y + z = \frac{1}{2}; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$$

Chứng minh rằng:  $M = (x^3 + y^3)(y^{2013} + z^{2013})(z^{2023} + x^{2023}) = 0$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn  $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$

Chứng minh rằng  $a + b + c + d$  chia hết cho 6

**Bài 4 (6,0 điểm):** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho góc IOM bằng  $90^\circ$ . Gọi N là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh  $BI = CM$

b) Tính diện tích tứ giác BIOM theo a

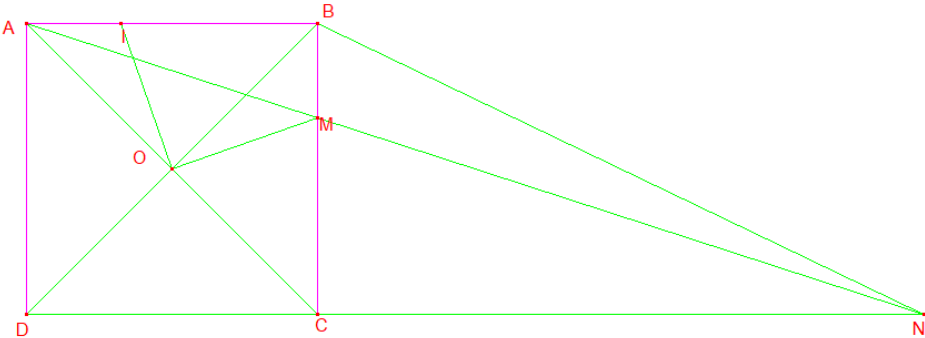
c) Chứng minh  $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

**Bài 5 (1,0 điểm):** Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$



Bài	Nội dung	Điểm
1(5đ)	1) a) $x^2 - x - 2022.2023 = x^2 - x - 2022(2022 + 1)$ $= x^2 - x - 2022^2 - 2022$ $= \dots\dots(x + 2022)(x - 2023)$	0,5 0,5
	b) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ $= a^3(b - c) - b^3(b - c) - b^3(a - b) + c^3(a - b)$ $= \dots\dots = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$	0,5 0,5
	2) Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z; trong đó cạnh huyền là z (x, y, z là các số nguyên dương) Ta có $xy = 2(x+y+z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2) Từ (2) suy ra $z^2 = (x+y)^2 - 2xy$ , thay (1) vào ta có : $z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$ $z^2 + 4z = (x+y)^2 - 4(x+y)$ $z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$ $(z+2)^2 = (x+y-2)^2$ , suy ra $z+2 = x+y-2$ $z = x + y - 4$ ; thay vào (1) ta được : $xy = 2(x+y+x+y-4)$ $xy - 4x - 4y = -8$ $(x-4)(y-4) = 8 = 1.8 = 2.4$ Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là : $(x=5, y=12, z=13)$ ; $(x=12, y=5, z=13)$ ; $(x=6, y=8, z=10)$ ; $(x=8, y=6, z=10)$	0.25 0.5 0.25 0.5
3) Gọi đa thức thương của f(x) cho x - 2 và x + 1 lần lượt là Q <sub>1</sub> và Q <sub>2</sub> Theo bài ra ta có $f(x) = (x - 2)Q_1 + 5 = (x + 1)Q_2 - 4$ Vì f(x) chia cho x - 2 dư 5 nên $f(2) = 5 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + c = 5$ $\Leftrightarrow 4a + 2b + c = -3$ (*) Vì f(x) chia cho x + 1 dư -4 nên $f(-1) = -4$ $\Rightarrow -1 + a - b + c = -4 \Leftrightarrow a - b + c = -3$ (**) Từ * và ** $\Rightarrow a = -b$ Thay $a = -b$ vào M ta có $M = 0$	0.25 0.25 0.25 0.5 0.25	
2(4 đ)	1) $A = \left( \frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x - 1} (x \neq 1)$ $= \left( \frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)((x^2 + x + 1))} - \frac{x^2 + 3}{(x - 1)(x^2 + 3)} \right) : \frac{1}{x - 1}$ $= \dots\dots\dots$ $= \frac{2x^2 + 2 + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} : \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ KL:.....	0,5 0,5 0,5 0,75 0,25
	2) Ta có	

	$x^2 \geq 0$ $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ nên $A \geq 0$ (1) Xét hiệu $\frac{4}{3} - A = \dots\dots\dots = \frac{(x+2)^2}{3(x^2+x+1)}$ Lập luận $\Rightarrow A \leq \frac{4}{3}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 \leq A \leq \frac{4}{3}$ . Vì A là số nguyên nên $A \in \{0;1\}$ Với $A = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots x = 0$ (TM) Với $A = 1 \Rightarrow \dots\dots\dots x = -1$ (TM) KL...	0,25     0,25  0,5  0,5
3 (4đ)	Ta có $x + y + z = 0,5$ (1) $\Rightarrow 2x + 2y + 2z = 1$ Ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2x+2y+2z}{xyz} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ (2) (vì $1/x + 1/y + 1/z > 0$ ) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ $\Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$ Nếu $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow M = 0$ Nếu $y + z = 0 \dots\dots\dots \Rightarrow M = 0$ Nếu $z + x = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow M = 0$	0,25   0,25  0,25  0,25  0,25  0,25  0,25
	2) Ta có $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$ $\Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ Vì 6 chia hết cho 6 nên $6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ chia hết cho 6 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 6 Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$ $= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$ Chứng minh $a^3 - a; b^3 - b; c^3 - c$ chia hết cho 6 $\dots \Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 6	0,25  0,25  0,25  0,25  0,25  0,25
4	 <p>a) Chứng minh <math>\Delta BIO = \Delta CMO</math> (g.c.g)  <math>\Rightarrow BI = CM</math> (2 cạnh tương ứng)</p>	0,5    1,5 0,5
	a) Ta có $\Delta BIO = \Delta CMO$ nên $S_{BIO} = S_{CMO}$ $S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$ $= S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} a^2$	0,5   1,5

	<p>c) Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AN cắt CD tại E          Chứng minh AE = AM          Xét tam giác ANE vuông tại A có AD vuông góc NE có</p> $S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE$ $\Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2 \quad (*)$ <p>Áp dụng định lý pytago ta có: <math>NE^2 = AN^2 + AE^2 \quad (**)</math></p> $(*) \text{ và } (**) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2}$ <p>Vì AE = AM và CD = AD <math>\Rightarrow</math> đpcm</p>	<p>0,5  0,5 0,25  0,5 0,25</p>
<p>5 (1 đ)</p>	<p>Ta có <math>\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (a, b, c &gt; 0)</math>  <math>\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)</math>  <math>\dots \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0</math> (Luôn đúng)</p> <p>Do đó <math>\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a^3 - a^2b}{3};</math></p> <p>Chứng minh tương tự...</p> <p>Ta được: <math>VT \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a}{3}</math></p> <p>Vì vai trò của a, b, c như nhau, nên ta giả sử <math>a \geq b \geq c &gt; 0</math>  <math>a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a)</math>  <math>= a^2(a - b) + b^2(b - a + a - c) + c^2(c - a) = (a - b)^2(a + b) + (a - c)(b - c)(b + c) \geq 0</math>          (Với mọi <math>a \geq b \geq c &gt; 0</math>).</p> <p>Từ đó <math>\Rightarrow VT \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}</math> Dấu "=" xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c</math></p>	<p>0,25    0,25    0,25</p>