

Câu I (3 điểm).

1) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1} + \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)}}.$$

2) Giải phương trình

$$3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x+1} + 1) = 6 - 2x.$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + (x + y)(xy + 1) = 4 + x^2 + y^2.$$

2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} - \frac{1}{1 + c^2}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) . Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T . Đường thẳng qua T song song với OA cắt trung trực CA, AB lần lượt tại các điểm E, F .

1) Chứng minh rằng hai tam giác OEF và ABC đồng dạng.

2) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF . Chứng minh rằng $OJ \parallel BC$.

3) Gọi K là trực tâm tam giác OEF . Chứng minh rằng AT chia đôi đoạn thẳng OK .

Câu IV (1 điểm). Với $n > 1$, chứng minh rằng từ tập con A có $n+2$ số của tập $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ luôn có thể chọn ra 2 số mà hiệu của chúng lớn hơn n và nhỏ thua $2n$.

.....Hết