

Đề thi gồm có: 01 trang

BÀI THI MÔN 1: Môn Toán chung
Dành cho tất cả các thí sinh thi thử
Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh:
Số báo danh:

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \frac{4\sqrt{x}+8}{x-4} - \frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1} + \frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 4.$$

1) Chứng minh rằng $A = \frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm) Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30. Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x + 2m + 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4.

2) Chứng minh rằng, với hai số thực a, b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2 - 2ax - (a^2 - 4b^2 + 1) = 0$ và $x^2 - 4bx - (b^2 - 2ab - a) = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm nằm trên (O) (M khác A, B). Trong nửa mặt phẳng chứa M , có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB . Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D .

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

2) Vẽ đường tròn (I) qua M , tiếp xúc với Ax tại C . Tia OC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai J . Chứng minh rằng J là trung điểm của OC .

3) Gọi E là trung điểm của OA . Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn (I) .

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên.

2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

.....Hết.....

**ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023 – LẦN 2**

BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chung

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1.1 1,0 điểm	$A = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$A = \frac{4}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} + \frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$A = \frac{4(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	0,25
	$A = \frac{3x-3\sqrt{x}-6}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	0,25
	$A = \frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2\sqrt{x}+1}$	0,25
Câu 1.2 1,0 điểm	+ Dễ chứng minh: $0 < A \leq 3$	0,25
	+ Vì A là số nguyên nên $A \in \{1; 2; 3\}$	0,25
	+ $A = 1 \Rightarrow x = 1$	0,25
	+ $A = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$	0,25
	+ $A = 3 \Rightarrow x = 0$	0,25
	+ Kết hợp điều kiện ta có các giá trị x thỏa mãn là $0, \frac{1}{16}, 1$.	0,25
	Ghi chú: Nếu học sinh lập luận $2\sqrt{x}+1$ là ước của 3 và tìm ra $x \in \{0; 1\}$ thì không cho điểm nào từ đó đến hết câu.	
Câu 2 2,0 điểm	+ Gọi x là số dây ghế và y là số ghế mỗi dây trong hội trường lúc bình thường. ($x, y \in \mathbb{N}^*; y \leq 30$)	0,25
	+ Vì bình thường hội trường có 374 ghế và số ghế mỗi dây bằng nhau nên ta có phương trình: $xy = 374$ (1)	0,25
	+ Vì khi kê mỗi dây thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dây ghế (số ghế ở mỗi dây vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432 nên ta có phương trình: $(x+1)(y+2) = 432$ (2)	0,25
	+ Từ (2) ta có: $xy + y + 2x + 2 = 432$ (3)	0,25
	+ Lấy (3) – (1) theo vế ta thu được: $y + 2x = 56$ (4)	0,25
	+ Từ (4) ta có: $y = 56 - 2x$, thế vào (1) ta thu được: $x(56 - 2x) = 374$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 - 56x + 374 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 28x + 187 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-17)(x-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=17 \\ x=11 \end{cases}$	0,25
	$x=17 \Rightarrow y=22$ $x=11 \Rightarrow y=34$ Kết hợp điều kiện $y \leq 30$ ta có $x=17, y=22$. Vậy bình thường hội trường có 17 dây ghế.	0,25

Câu 3.1 1,0 điểm	+ Vì hàm số $y = (m-1)x + 2m + 3$ là hàm bậc nhất nên $m \neq 1$. Khi đó đồ thị của hàm số cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(\frac{-2m-3}{m-1}; 0), B(0; 2m+3)$.	0,25
	+ Khi đó $OA = \left \frac{-2m-3}{m-1} \right , OB = 2m+3 \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{(2m+3)^2}{2 m-1 }$ + Từ giả thiết, ta có: $\frac{(2m+3)^2}{2 m-1 } = 4 \Leftrightarrow (2m+3)^2 = 8 m-1 $ (*)	0,25
	+ TH1: $m \geq 1$. Phương trình (*) trở thành: $4m^2 + 12m + 9 = 8m - 8 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 17 = 0$ $\Delta' = -64 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.	0,25
	+ TH2: $m < 1$. Phương trình (*) trở thành: $4m^2 + 12m + 9 = -8m + 8 \Leftrightarrow 4m^2 + 20m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m = \frac{-2\sqrt{6}-5}{2} \end{cases}$ Kết hợp điều kiện ta có $\begin{cases} m = \frac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m = \frac{-2\sqrt{6}-5}{2} \end{cases}$	0,25
Ghi chú: nếu trong bài làm học sinh không chỉ ra $m \neq 1$ thì trừ 0,25 điểm.		
Câu 3.2 1,0 điểm	+ Ta thấy $x^2 - 2ax - (a^2 - 4b^2 + 1) = 0$ có: $\Delta'_1 = a^2 + (a^2 - 4b^2 + 1) = 2a^2 - 4b^2 + 1$ và $x^2 - 4bx - (b^2 - 2ab - a) = 0$ có $\Delta'_2 = 4b^2 + (b^2 - 2ab - a) = 5b^2 - 2ab - a$	0,25
	+ Xét $\Delta'_1 + \Delta'_2 = 2a^2 + b^2 - 2ab - a + 1$	0,25
	$\Delta'_1 + \Delta'_2 = 2a^2 + b^2 - 2ab - a + 1 = (a-b)^2 + (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$	0,25
	+ Ta thấy $\Delta'_1 + \Delta'_2 > 0$ nên có ít nhất một trong hai số Δ'_1, Δ'_2 là số dương. Từ đó suy ra ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.	0,25
Câu 4	+ Hình vẽ:	

	<p>+ Ta thấy: ΔFJO đồng dạng với ΔJEO (g.g) do $\angle FJO = \angle JEO = 90^\circ, \angle FOJ = \angle JOE$</p> $\Rightarrow \frac{FJ}{JE} = \frac{JO}{EO} = \frac{CO}{AO} = \frac{CO}{BO} \text{ (do } J, E \text{ lần lượt là trung điểm của } CO, AO). \text{ (8)}$	0,25
	<p>+ Mặt khác, theo tính chất góc ngoài tam giác: $\angle COB = \angle EJO + 90^\circ = \angle FJE$ (9)</p> <p>Từ (8), (9) suy ra ΔFJE đồng dạng với ΔCOB (c.g.c)</p>	0,25
	$\Rightarrow \angle JEF = \angle OBC \Rightarrow \angle OBC + \angle OEG = \angle JEF + \angle OEG = \angle JEO = 90^\circ$ $\Rightarrow EF \perp BC.$ <p>+ Từ đó, ta thấy đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại điểm F thuộc đường tròn (I) (đpcm).</p>	0,25
Câu 5.1 0,25 điểm	<p>+ Đề chỉ ra có số thực x để $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên ta xét phương trình $x + \frac{1}{x} = 3$</p> $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$	0,25
Câu 5.2 0,75 điểm	<p>+ Trước hết ta chứng minh x là số vô tỉ. Thật vậy, giả sử x là số hữu tỉ thì x có dạng $\frac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$. Khi đó, $x + \frac{1}{x} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$.</p> <p>+ Vì $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên nên $(m^2 + n^2) : mn$. Do đó, $m^2 : n, n^2 : m$.</p> <p>Mà $(m, n) = 1$ nên $m : n, n : m$. Lại do $(m, n) = 1$ nên $m = \pm 1$.</p> <p>Tương tự $n = \pm 1$. Do đó $x = \pm 1$ (trái giả thiết $x \neq 1$).</p> <p>Vậy x là số vô tỉ. (1)</p>	0,25
	<p>+ Ta thấy: $\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2x$. Nếu $x - \frac{1}{x}$ là số hữu tỉ thì $\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)}{2} = x$ là số hữu tỉ (trái với (1)). Do đó $x - \frac{1}{x}$ là số vô tỉ. (2)</p>	0,25
	<p>+ Mặt khác, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$. Vì $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên nên $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ là số nguyên. Do đó $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022}$ cũng là số nguyên.</p> <p>+ Do $x \neq 1$ nên $x - \frac{1}{x} \neq 0$.</p> <p>+ Ta thấy: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$. Nếu $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số hữu tỉ thì $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023} : \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022} = x - \frac{1}{x}$ là số hữu tỉ (trái với (2)).</p> <p>Vậy $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.</p>	0,25