SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
BÌNH ĐỊNH	NĂM HỌC 2017 – 2018

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN (Chuyên Toán)
Ngày thi: 04/ 6/ 2017
Thời gián làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1: *(2,0 điểm)*.

Cho biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right)\cdot\frac{x^2-2x+1}{2}$

a) Tìm điều kiện của x để biếu thức A có nghĩa. Rút gọn A,

b) Tìm x để $A\geq 0$

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Bài 2 *(2,0 điểm)*.

1. Giải phương trình sau: $4x^4+4x^3-20x^2+2x+1=0$

2. Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không là số chính phương.

Bài 3 *(1,0 điểm)*.

Cho đa thức $f(x)=x^2-2(m+2)x+6m+1$ *(m là tham số)*. Bằng cách đặt x = t + 2. Tính f(x) theo t và tìm điều kiện để phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm lớn hơn 2.

Bài 4 *(4,0 điểm)*.

1. Cho đường tròn (T) tâm O đường kính AB, trên tiếp tuyến tại A lấy một điểm P khác A, điểm K thuộc đoạn OB *(K khác O và B)*. Đường thẳng PK cắt đường tròn (T) tại C và D *(C nằm giữa P và D),* H là trung điểm của CD

a) Chứng minh tứ giác AOHP nội tiếp được đường tròn.

b) Kẻ DI song song PO, điểm I thuộc AB, chứng minh: $\widehat{PDI}=\widehat{BAH}$

c) Chứng minh đẳng thức: $PA^2=PC\cdot PD$

d) BC cắt OP tại J, chứng minh AJ // DB

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm I thuộc miền trong tam giác, kẻ $IM\perp BC$, $IN\perp AC$, $IK\perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2+IN^2+IK^2$ nhỏ nhất

Bài 5 *(1,0 điểm)*.

Cho các sô thực dương x, y, z thỏ mãn xyz ≤ 1. Chứng minh rằng: $\frac{x(1-y^3)}{y^3}+\frac{y(1-z^3)}{z^3}+\frac{z(1-x^3)}{x^3}\geq 0$

Lượt giải:

Bài 1: *(2,0 điểm).*

a) A có nghĩa khi và chỉ khi: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-1 \ne 0 \\ x+2\sqrt{x}+1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \\ \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

Vậy điều kiện để biểu thức A có nghĩa là: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

Khi đó, $A = \left[\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right] \cdot \dfrac{(x-1)^2}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} \cdot \dfrac{(x-1)^2}{2}$

$= \dfrac{x-\sqrt{x}-2-\left(x+\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+1} \cdot \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)} = -\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = -x+\sqrt{x}$

Vậy $A = -x+\sqrt{x}$ (với $x \ge 0, x \ne 1$)

b) $A \ge 0 \Leftrightarrow -x+\sqrt{x} \ge 0$ (với $x \ge 0, x \ne 1$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \le \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$

Vậy $A \ge 0$ khi $0 \le x < 1$

c) Với $x \ge 0, x \ne 1$, ta có:

$A = -\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right]+\dfrac{1}{4} = -\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \ge \dfrac{1}{4}$, dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

Vậy $\text{Max}(A) = \dfrac{1}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{4}$

Bài 2 *(2,0 điểm).*

1. Giải phương trình sau: $4x^4+4x^3-20x^2+2x+1=0$ (1)

Dễ thấy x = 1 không là nghiệm của (1), do đó:

(1) $\Leftrightarrow 4x^2+4x-20+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ (vì $x^2 \ne 0$)

$\Leftrightarrow \left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)-24=0 \Leftrightarrow y^2+2y-24=0$ (với $y = 2x+\dfrac{1}{x} \ne 0$)

$\left[\begin{array}{l} y=-6 \\ y=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+6=0 \\ y-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{1}{x}+6=0 \\ 2x+\dfrac{1}{x}-4=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 2x^2+6x+1=0 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}; \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$

Cách 2: (1) $\Leftrightarrow (4x^4+4x^3+x^2)-21x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (2x^2+x)^2+2(2x^2+x)+1-25x^2=0$

$\Leftrightarrow (2x^2+x+1)^2-(5x)^2=0 \Leftrightarrow (2x^2+6x+1)(2x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+6x+1=0 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

2. Giả sử b^2-4ac là số chính phương $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: b^2-4ac=n^2 \Leftrightarrow 4ac = b^2-n^2 = (b-n)(b+n)$ (*)

$\Rightarrow (b-n)(b+n) \vdots 4$ và hai số $b-n$, $b+n$ cùng tính chẵn lẻ (vì $(b-n)+(b+n)=2b$)

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} b-n=2a \\ b+n=2c \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b-n=2c \\ b+n=2a \end{cases} \Rightarrow b=a+c \Rightarrow \overline{abc}=100a+10(a+c)+c=11(10a+c)$ là hợp số

Cách 2: Giả sử b^2-4ac là số chính phương khi đó:

$4a\cdot\overline{abc}=400a^2+40ab+4ac=(20a)^2+2\cdot 20a\cdot b+b^2-n^2=(20a+b)^2-n^2=(20a+b+n)(20a+b-n)$

nên trong hai số 20a + b + n và 20a + b – n có một số chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$ nhưng đều này không thể xãy ra vì cả hai số đều nhỏ hơn $\overline{abc}$

Thật vậy: $b^2-n^2=4ac>0$ nên n < b. Do đó: 20a + b – n < 20a + b+ n < 100a + 10b + c = $\overline{abc}$

Vậy b^2-4ac không chính phương

Bài 3 *(1,0 điểm)*.

$x=t+2 \Rightarrow g(t)=f(t+2)=(t+2)^2-2(m+2)(t+2)+6m+1=t^2+4t+4-2(m+2)t-4(m+2)+6m+1$

$\Leftrightarrow g(t)=t^2-2mt+2m-3$

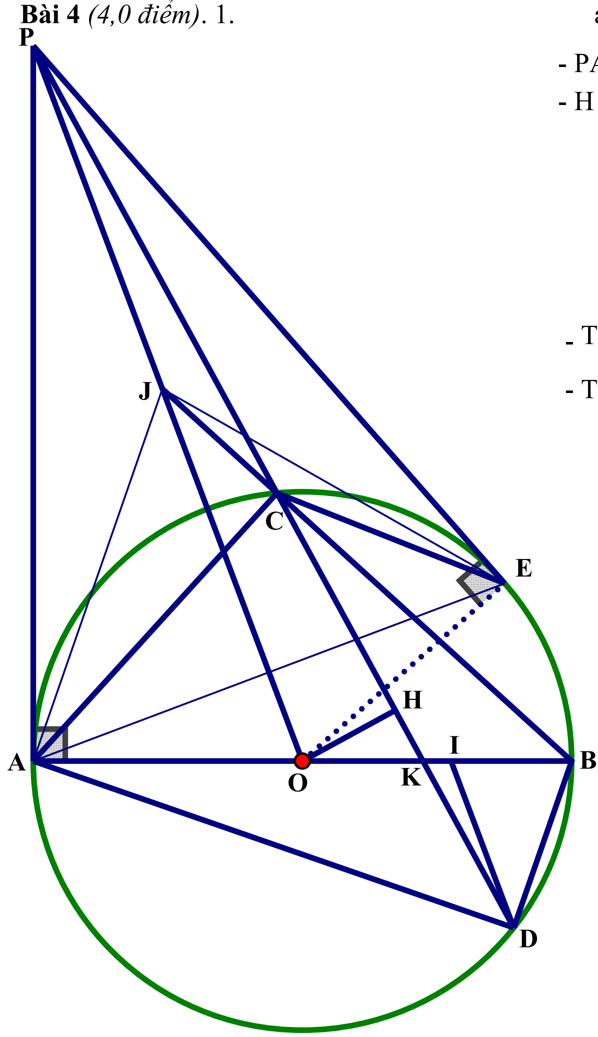
f(x) = 0 có hai nghiệm lớn hơn 2 khi và chỉ khi phương trình g(t) = 0 có hai nghiệm dương:

$\Leftrightarrow t^2-2mt+2m-3=0\,(t>0)$

Theo hệ thức vi ét thì hai nghiệm đó thỏa mãn: $\begin{cases} t_1+t_2=2m>0 \\ t_1t_2=2m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm lớn hơn 2 khi $m>\dfrac{3}{2}$

Bài 4 *(4,0 điểm)*. 1.



a) Chứng minh tứ giác AOHP nội tiếp được đường tròn:

- $PA \perp OA$ (PA là tiếp tuyến của đường tròn (T)) $\Rightarrow \widehat{PAO}=90^o$
- H là trung điểm của dây không qua tâm O của đường tròn (T) nên $OH \perp BC \Rightarrow \widehat{PHO}=90^o$

Do đó: $\widehat{PAO}+\widehat{PHO}=180^o$

Vậy tứ giác AOHP nội tiếp được đường tròn (*)

b) Chứng minh $\widehat{PDI}=\widehat{BAH}$

- Ta có: $\widehat{PDI}=\widehat{HPO}$ (slt, DI // PO)
- Từ (*) suy ra: $\widehat{HPO}=\widehat{HAB}$ (nội tiếp cùng chắn cung OH)

Vậy $\widehat{PDI}=\widehat{BAH}$

c) Chứng minh đẳng thức: $PA^2=PC\cdot PD$

ΔPAC và ΔPDA có:

$\widehat{APC}=\widehat{DPA}$ (góc chung)

$\widehat{PAC}=\widehat{PDA}$ (nôi tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn (T))

$\Rightarrow \Delta PAC \backsim \Delta PDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PA} \Rightarrow PA^2=PC\cdot PD$

d) BC cắt OP tại J, chứng minh AJ // DB

- Kẻ tiếp tuyến PE với đường tròn (T) (E là tiếp điểm), từ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra PO là trung trực của AE

$\Rightarrow \widehat{JAP}=\widehat{JEP}$ (tính chất đối qua xứng trục OP) (1)

- Từ (*) suy ra: $\widehat{JPE}=\widehat{OAE}$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OE}$)

và $\widehat{OAE}=\widehat{BCE}$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$ của đường tròn (T))

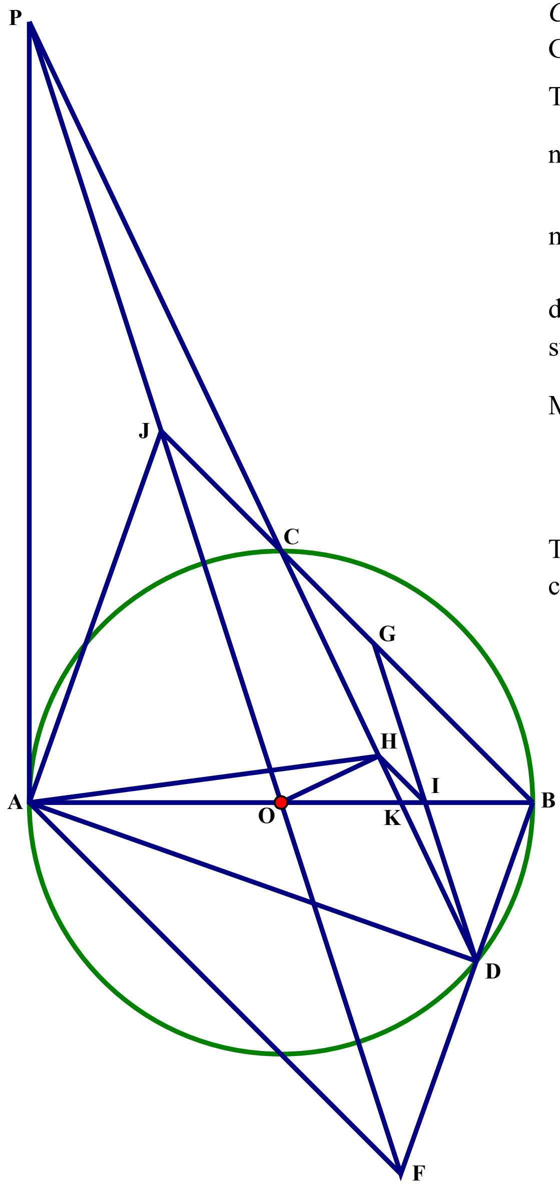
nên $\widehat{JPE}=\widehat{BCE}$, suy ra tứ giác JPCE nội tiếp. (2)

- Từ (2) suy ra $\widehat{JEP}=\widehat{JCP}$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{JP}$) lại có $\widehat{JCP}=\widehat{BCD}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn (T)), do đó: $\widehat{JEP} = \widehat{BAD}$ (3)

- Từ (1) và (3) suy ra: $\widehat{JAP} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BAJ} = \widehat{JAP} + \widehat{BAJ}$ hay $\widehat{JAD} = \widehat{PAB} = 90^o \Rightarrow JA \perp AD$ (4)

Mặt khác $\widehat{ADB} = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (T) $\Rightarrow BD \perp AD$ (5)

(4) và (5) suy ra AJ // BD



Cách 2:

Gọi F là giao điểm của BD và PO, G là giao điểm của DI và BJ

Ta có: $\widehat{HDI} = \widehat{IAH}$ (suy ra từ kết quả câu a)

nên tứ giác ADHI nội tiếp, suy ra: $\widehat{IHD} = \widehat{IAD}$ $(= \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{ID})$

mà $\widehat{IAD} = \widehat{DCB}$ $(= \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn (T))

do đó: $\widehat{IHD} = \widehat{BCD}$ ở vị trí đồng vị,

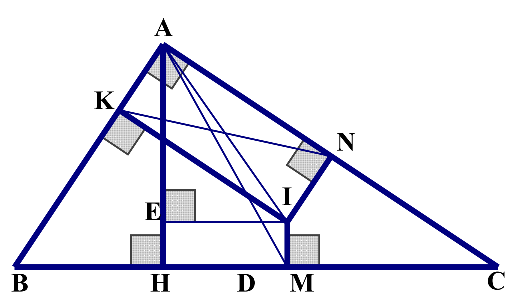
suy ra HI // BC lại có HC = HD , suy ra IC = ID (1)

Mặt khác: Δ OBF có ID // OF $\Leftrightarrow \frac{ID}{OF} = \frac{BI}{BO}$ (2)

Δ OBJ có IG // OJ $\Leftrightarrow \frac{BI}{BO} = \frac{GI}{OJ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra OJ = OE, lúc này O là trung điểm chung của JAFB nên JAFB là hình bình hành , suy ra: JA // BD

2. Ta có: $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b (*)



Kẻ đường cao AH $\Rightarrow$ H là điểm cố định (vì A, B, C cố định)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của I trên AH.

Áp dụng định lý Pytago cho các tam giác vuông INA, IPA

ta có: $IN^2 + AN^2 = IN^2 + IK^2 = IA^2 \geq EA^2$

Mặt khác: IM = EH (cạnh đối hình chữ nhật IEHM) nên:

$IM^2 + IN^2 + IK^2 \geq EH^2 + EA^2$

Áp dụng (*), ta có:

$$IM^2 + IN^2 + IK^2 \geq EH^2 + EA^2 \geq \frac{(EH + EA)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$$ không đổi (vì A, H cố định)

Dấu "=" xảy ra khi $IA = EA = EH = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường cao AH

Vậy khi I là trung điểm của đường cao AH thì tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ đạt GTNN là $\frac{AH^2}{2}$

Cách 2:

$\mathrm{IM}^2+\mathrm{IN}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{IM}^2+\mathrm{KN}^2$ (vì $\mathrm{IN}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{KN}^2$)

$=\mathrm{IM}^2+\mathrm{IA}^2$

Theo (*), ta có: $\mathrm{IM}^2+\mathrm{IN}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{IM}^2+\mathrm{IA}^2\geq\dfrac{(\mathrm{IM}+\mathrm{IA})^2}{2}\geq\dfrac{\mathrm{AM}^2}{2}\geq\dfrac{\mathrm{AH}^2}{2}$: không đổi

Dấu "=" xảy ra khi A, I, M thẳng hàng, M trùng H và IM = IA

$\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường cao AH

Vậy khi I là trung điểm của đường cao AH thì tổng $\mathrm{IM}^2+\mathrm{IN}^2+\mathrm{IK}^2$ đạt GTNN là $\dfrac{\mathrm{AH}^2}{2}$

Bài 5 *(1,0 điêm).*

Các số thực dương x, y, z thỏ mãn $xyz\leq 1$, nên ta có: $0<xyz\leq 1$, do đó

$$\frac{1\cdot x}{y^3}+\frac{1\cdot y}{z^3}+\frac{1\cdot z}{x^3}\geq\frac{x^2z}{y^2}+\frac{y^2x}{z^2}+\frac{z^2y}{x^2}\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương: $\dfrac{x^2z}{y^2}$; $\dfrac{y^2x}{z^2}$; z, ta được:

$\dfrac{x^2z}{y^2}+\dfrac{y^2x}{z^2}+z\geq 3x$ (2) , dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x^2z}{y^2}=\dfrac{y^2x}{z^2}=z\Leftrightarrow x=y=z=1$

tương tự có: $\dfrac{y^2x}{z^2}+\dfrac{z^2y}{x^2}+x\geq 3y$ (3) và $\dfrac{z^2y}{x^2}+\dfrac{x^2z}{y^2}+y\geq 3z$ (4) dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1

Từ (2), (3) và (4) suy ra: $2\left(\dfrac{x^2z}{y^2}+\dfrac{y^2x}{z^2}+\dfrac{z^2y}{x^2}\right)+x+y+z\geq 3(x+y+z)\Leftrightarrow\dfrac{x^2z}{y^2}+\dfrac{y^2x}{z^2}+\dfrac{z^2y}{x^2}\geq x+y+z$ (5)

Từ (1) và (5) suy ra: $\dfrac{x}{y^3}+\dfrac{y}{z^3}+\dfrac{z}{x^3}\geq x+y+z$, dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1

$\Leftrightarrow\dfrac{x}{y^3}-x+\dfrac{y}{z^3}-y+\dfrac{z}{x^3}-z>0$, dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1

Vậy: $\dfrac{x(1-y^3)}{y^3}+\dfrac{y(1-z^3)}{z^3}+\dfrac{z(1-x^3)}{x^3}\geq 0$, dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1