

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Ngày thi: 03/6/2017

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề thi gồm có: 02 trang)

Câu 1: (1,5 điểm)

a) Cho biểu thức $Q = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 9)(x + 2)^2}$ (với $x \neq \pm 3, x \neq -2$). Rút gọn

và tính giá trị biểu thức Q khi $x = \frac{3}{2}$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$$

b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y - 2m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho tam giác AOB đều và tính diện tích tam giác đó.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x - 3 + m = 0$ (m là tham số). Giả sử phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức H .

b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$.

Câu 4: (2,0 điểm)

a) Đề tạo sân chơi cho học sinh tham gia các hoạt động tìm hiểu về hình ảnh và con người Đồng Tháp, Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh của một trường đã tổ chức Hội thi *Đồng Tháp trong trái tim tôi* với các nội dung về hoạt động khởi nghiệp, du lịch trải nghiệm những địa danh, nét văn hóa đặc trưng làng nghề, các món ăn, cây trái,... của tỉnh. Sau hai vòng thi Ban tổ chức đã chọn được ba đội xuất sắc là Hoa Sen, Hoa Súng, Hương Tràm vào thi chung kết. Theo quy định của Ban tổ chức Hội thi, mỗi đội phải trả lời 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được cộng 10 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 3 điểm, mỗi câu không trả lời thì không được điểm. Trải qua các câu hỏi thi, đội Hoa Sen được 61 điểm. Hỏi đội Hoa Sen đã trả lời đúng, sai và không trả lời bao nhiêu câu hỏi?

b) Thực hiện đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới kiểm tra đánh giá theo hướng phát triển năng lực học sinh, trong một tiết dạy hình học, một giáo viên đã ứng dụng công nghệ thông tin, sử dụng phần mềm biểu diễn cho học sinh quan sát trực quan. Cụ thể: Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $AB = 30\text{cm}$, $CD = 54\text{cm}$ và đường cao $AH = 9\text{cm}$. Cho hình thang này quay một vòng quanh cạnh đáy CD . Em hãy giúp bạn tính:

b1) Thể tích của hình tạo thành.

b2) Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A có phân giác trong AM ($M \in BC$) và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc cạnh BC , cắt đoạn thẳng AC tại N , cắt đường thẳng AB tại P .

a) Chứng minh: tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn. Suy ra tam giác PMC vuông cân.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , I là trung điểm của đoạn thẳng PC . Chứng minh: ba điểm M, O, I thẳng hàng và $MO \parallel BN$.

c) Chứng minh: $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.

d) Khi $AB = 3\text{cm}$, tính diện tích tam giác PBC .

(Chú ý: đối với câu 5, không có hình vẽ, không chấm điểm cả câu).

HẾT.

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký GT1: _____

Chữ ký GT2: _____

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Ngày thi: **03/6/2017**

(Hướng dẫn chấm gồm có: **06** trang)

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1: (1,5 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
a) Cho biểu thức $Q = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 9)(x + 2)^2}$ (với $x \neq \pm 3, x \neq -2$). Rút gọn và tính giá trị biểu thức Q khi $x = \frac{3}{2}$.	0,5
$Q = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 9)(x + 2)^2} = \frac{(x - 3)(x + 2)(x - 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)(x + 2)}$	0,25
$= \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{1}{7}$.	0,25
b) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$. (1)	1,0
$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 1} + 2\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.	0,25
$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)(2x + 1)} + 2\sqrt{(2x + 1)^2} = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.	0,25
$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)(2x + 1)} + 2 2x + 1 = x^2(2x + 1) + (2x + 1)$.	0,25
$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)(2x + 1)} + 2 2x + 1 = (2x + 1)(x^2 + 1)$ (*)	0,25
Do VT(*) không âm nên VP(*) không âm. Suy ra $x \geq \frac{-1}{2}$ và $ 2x + 1 = 2x + 1$.	0,25
(*) $\Leftrightarrow \sqrt{(2x + 1)(2x + 1)} = (2x + 1)(x^2 + 1)$	0,25
$\Leftrightarrow 2x + 1 = (2x + 1)(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \text{ (thỏa điều kiện)} \end{cases}$	0,25
Vậy nghiệm pt: $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$	

Câu 2: (1,5 điểm)

NỘI DUNG		ĐIỂM
a) Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$	0,5
Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, Hệ phương trình có dạng:	$\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - P = 19 \end{cases} \quad (*)$	0,25
Giải hpt (*) được:	$\begin{cases} S = 5 \\ S = -6 \end{cases}$	
Với $S = -6 \Rightarrow P = 17$. Do $S^2 - 4P = -32 < 0$ nên vô nghiệm.		
Với $S = 5 \Rightarrow P = 6 \Rightarrow$	$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
Vậy nghiệm hệ phương trình:	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$	
b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y - 2m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho tam giác AOB đều và tính diện tích tam giác đó.		1,0
Phương trình hoành độ giao điểm:	$x^2 = 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2m + 1 = 0$	
Điều kiện để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt:	$\Delta = 8m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$	0,25
Hoành độ giao điểm:	$x = \pm\sqrt{2m - 1}$	
Đặt tọa độ $A(-\sqrt{2m - 1}; 2m - 1); B(\sqrt{2m - 1}; 2m - 1)$.		0,25
Do A, B đối xứng nhau qua Oy nên $OA = OB$.		
Tam giác AOB đều: $OA = AB$, tức là: $\sqrt{4m^2 - 2m} = 2\sqrt{2m - 1}$		0,25
Giải pt, ta được: $m = 2; m = \frac{1}{2}$ (loại).		
Diện tích tam giác đều AOB :	$S = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$	0,25

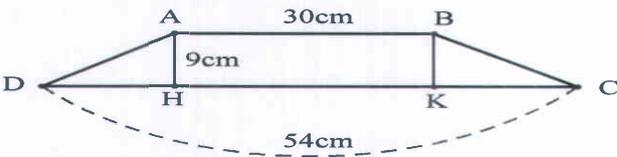
Câu 3: (2,0 điểm)

NỘI DUNG		ĐIỂM
a) Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x - 3 + m = 0$ (m là tham số). Giả sử phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức H .		1,0
Ta có: $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$		0,25
Theo Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$		0,25
$H = (2m + 1)^2 - 8(m - 3) = 4m^2 - 4m + 25 = (2m - 1)^2 + 24$.		0,25
Vậy giá trị nhỏ nhất của H bằng 24 khi $m = \frac{1}{2}$.		0,25

b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$.	1,0
Do $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ nên $1-x^2; 1-y^2; 1-z^2 \neq 0$, $\sqrt{1-x^2}; \sqrt{1-y^2}; \sqrt{1-z^2}$ có nghĩa và $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{x\sqrt{1-x^2}}$.	0,25
Thật vậy: $x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2} \left((x)^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{x\sqrt{1-x^2}} \geq 2x^3$.	0,25
Tương tự: $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \geq 2y^3$ và $\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2z^3$	0,25
Suy ra: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2(x^3 + y^3 + z^3) = 2$ (đpcm)	0,25

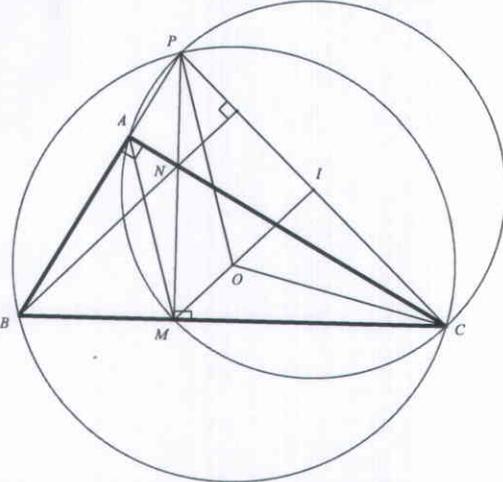
Câu 4: (2,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
a) Để tạo sân chơi cho học sinh tham gia các hoạt động tìm hiểu về hình ảnh và con người Đồng Tháp, Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh của một trường đã tổ chức Hội thi <i>Đồng Tháp trong trái tim tôi</i> với các nội dung về hoạt động khởi nghiệp, du lịch trải nghiệm những địa danh, nét văn hóa đặc trưng làng nghề, các món ăn, cây trái,... của tỉnh. Sau hai vòng thi Ban tổ chức đã chọn được ba đội xuất sắc là Hoa Sen, Hoa Súng, Hương Tràm vào thi chung kết. Theo quy định của Ban tổ chức Hội thi, mỗi đội phải trả lời 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được cộng 10 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 3 điểm, mỗi câu không trả lời thì không được điểm. Trải qua các câu hỏi thi, đội Hoa Sen được 61 điểm. Hỏi đội Hoa Sen đã trả lời đúng, sai và không trả lời bao nhiêu câu hỏi?	1,0
Gọi x, y, z lần lượt là số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai và số câu không trả lời ($x, y, z \in \mathbb{Z}^*; x, y, z \leq 12$).	
Ta có hpt: $\begin{cases} x + y + z = 12 & (1) \\ 10x - 3y = 61 & (2) \end{cases}$	0,25
Pt (2): $\Rightarrow y = \frac{-61+10x}{3} \Rightarrow y = -20 + 3x + \frac{x-1}{3}$	
Đặt $t = \frac{x-1}{3} \Rightarrow x = 1+3t \Rightarrow y = -17+10t$	0,25
Nghiệm pt(2): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -17+10t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$	

Do $\begin{cases} 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 1+3t \leq 12 \\ 0 \leq -17+10t \leq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{11}{3} \\ \frac{17}{10} \leq t \leq \frac{29}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{17}{10} \leq t \leq \frac{29}{10} \Rightarrow t = 2$	0,25
$\Rightarrow x = 7; y = 3; z = 2.$ Vậy đội Hoa Sen đã trả lời đúng 07 câu, trả lời sai 03 câu và không trả lời 02 câu.	0,25
b) Tiếp tục đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới kiểm tra đánh giá theo hướng phát triển năng lực học sinh, trong một tiết dạy hình học, một giáo viên đã ứng dụng công nghệ thông tin, sử dụng phần mềm biểu diễn cho học sinh quan sát trực quan. Cụ thể: Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $AB = 30\text{cm}$, $CD = 54\text{cm}$ và đường cao $AH = 9\text{cm}$. Cho hình thang này quay một vòng quanh cạnh đáy CD . Em hãy giúp bạn tính:	1,0
	
b1) Thể tích của hình tạo thành.	0,5
Vẽ $BK \perp CD$, tính được $HD = KC = 12\text{cm}$; $AD = BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15(\text{cm})$. Khi quay hình thang một vòng quanh cạnh CD thì tạo thành một hình trụ, hai đầu là hai hình nón cùng đáy với đáy hình trụ.	0,25
Thể tích hình trụ: $V_1 = \pi R^2 h_1 = \pi \cdot 9^2 \cdot 30 = 2430\pi (\text{cm}^3)$. Thể tích hai hình nón: $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 648\pi (\text{cm}^3)$. Thể tích của hình tạo thành: $V = V_1 + V_2 = 3078\pi (\text{cm}^3)$.	0,25
b2) Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.	0,5
Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_1 = 2\pi R h_1 = 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 30 = 540\pi (\text{cm}^2)$. Diện tích xung quanh của hai hình nón: $S_2 = 2\pi R l = 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 15 = 270\pi (\text{cm}^2)$.	0,25
Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành: $S = S_1 + S_2 = 810\pi (\text{cm}^2)$.	0,25

Câu 5: (3,0 điểm) (Chú ý: không có hình vẽ, không chấm điểm cả câu)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A có phân giác trong AM ($M \in BC$) và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc cạnh BC , cắt đoạn thẳng AC tại N , cắt đường thẳng AB tại P .	3,0

	
<p>a) Chứng minh: tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn. Suy ra tam giác PMC vuông cân.</p>	0,5
<p>Ta có: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{PAC} = 90^\circ$ Mà $\widehat{PMC} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow A, M$ nằm trên đường tròn đường kính $PC \Rightarrow$ tứ giác $PAMC$ nội tiếp đường tròn đường kính PC (đpcm).</p>	0,25
<p>Và $\widehat{MAC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAC} = 45^\circ$ (AM là phân giác \widehat{BAC}) $\widehat{MPC} = \widehat{MAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung \widehat{MC}) $\Rightarrow \widehat{MPC} = 45^\circ$ Suy ra: $\triangle PMC$ vuông cân tại M.</p>	0,25
<p>b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, I là trung điểm của đoạn thẳng PC. Chứng minh: ba điểm M, O, I thẳng hàng và $MO \parallel BN$.</p>	0,5
<p>Ta có: I trung điểm của dây cung PC nên $OI \perp PC$ Mà $IM \perp PC$ (IM là trung tuyến \triangle vuông cân PMC) Suy ra: M, O, I thẳng hàng (đpcm)</p>	0,25
<p>Xét $\triangle BPC$ có: $\begin{cases} AC \perp BP \\ PM \perp BC \end{cases}$ (gt) $\Rightarrow N$ là trực tâm $\triangle PBC \Rightarrow BN \perp PC$ Kết hợp: $IM \perp PC$ Suy ra: $BN \parallel IM$ hay $MO \parallel BN$ (đpcm).</p>	0,25
<p>c) Chứng minh: $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.</p>	1,0
<p>Ta có: $\widehat{PNA} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)</p>	0,25
<p>$\widehat{PNA} + \widehat{PNC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PNC} = 120^\circ$ (*)</p>	0,25
<p>Mặt khác: $\widehat{POC} = 2 \cdot \widehat{PBC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ (**)</p>	0,25
<p>Từ (*) và (**), ta được: $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$ (đpcm)</p>	0,25
<p>d) Khi $AB = 3\text{cm}$, tính diện tích $\triangle PBC$.</p>	1,0
<p>Tam giác ABC vuông tại A, nên có: $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = 6(\text{cm})$ $\tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \tan B = 3\sqrt{3}(\text{cm})$</p>	0,25
<p>Vì AM là phân giác của $\triangle ABC$, nên có: $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MC} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(\text{cm})$</p>	0,25

Suy ra: $MB = \frac{2AB}{1+\sqrt{3}} = 3(\sqrt{3}-1)(cm)$	
Do ΔPBM vuông tại M, nên có: $\cos B = \frac{BM}{BP} \Rightarrow BP = \frac{BM}{\cos B} = 6(\sqrt{3}-1)(cm)$	0,25
Vậy $S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6(\sqrt{3}-1) = 9\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(cm^2)$	0,25

HẾT.