

ĐỀ CHÍNH THỨC

**Câu I:** (2,0 điểm)

1. Cho phương trình :  $nx^2 + x - 2 = 0$  (1), với  $n$  là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi  $n=0$ .

b) Giải phương trình (1) khi  $n = 1$ .

2. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

**Câu II:** (2,0 điểm)

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{4\sqrt{y}}{2 + \sqrt{y}} + \frac{8y}{4 - y} \right) : \left( \frac{\sqrt{y} - 1}{y - 2\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)$ , với  $y > 0, y \neq 4, y \neq 9$ .

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm  $y$  để  $A = -2$ .

**Câu III:** (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d):  $y = 2x - n + 3$  và parabol (P):

$$y = x^2.$$

1. Tìm  $n$  để đường thẳng (d) đi qua điểm A(2;0).

2. Tìm  $n$  để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = 16$ .

**Câu IV:** (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính  $MN = 2R$ . Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại N.

Trên cung MN lấy điểm E tùy ý (E không trùng với M và N), tia ME cắt (d) tại

điểm F. Gọi P là trung điểm của ME, tia PO cắt (d) tại điểm Q.

1. Chứng minh ONFP là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh:  $OF \perp MQ$  và  $PM \cdot PF = PO \cdot PQ$ .

3. Xác định vị trí điểm E trên cung MN để tổng  $MF + 2ME$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu V:** (1,0 điểm)

Cho  $a, b, c$  là các số dương thay đổi thỏa mãn:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 2017$ . Tìm

giá trị lớn nhất của biểu thức:  $P = \frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c}$ .

----- HẾT -----

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu I: (2,0 điểm)

1)a) Thay  $n = 0$  Cho phương trình :  $nx^2 + x - 2 = 0$  ta có :  $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy với  $n = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x = 2$

b) Thay  $n = 1$  Cho phương trình :  $x^2 + x - 2 = 0$  phương trình bậc hai ẩn  $x$  có dạng  $a + b + c = 0$  nên phương trình có 1 nghiệm  $x_1 = 1$  áp dụng hệ thức vi ét ta có  $x_2 = -2$  ; Vậy với  $n = 1$  thì phương trình có 2 nghiệm  $x_1 = 1$  và  $x_2 = -2$

2. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 16 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

vậy nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

### Câu II: (2,0 điểm), với $y > 0, y \neq 4, y \neq 9$ .

1. Rút gọn biểu thức 
$$A = \left( \frac{4\sqrt{y}}{2 + \sqrt{y}} + \frac{8y}{4 - y} \right) : \left( \frac{\sqrt{y} - 1}{y - 2\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)$$

$$A = \frac{4\sqrt{y} \cdot (2 - \sqrt{y}) + 8y}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} : \frac{\sqrt{y} - 1 - 2(\sqrt{y} - 2)}{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - 2)} = \frac{8\sqrt{y} - 4y + 8y}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} : \frac{\sqrt{y} - 1 - 2\sqrt{y} + 4}{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - 2)}$$

$$A = \frac{8\sqrt{y} + 4y}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} : \frac{-\sqrt{y} + 3}{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - 2)} = \frac{4\sqrt{y}(2 + \sqrt{y})}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - 2)}{3 - \sqrt{y}} = \frac{4y}{3 - \sqrt{y}}$$

2) Thay  $A = -2$  vào ta có 
$$\frac{4y}{3 - \sqrt{y}} = -2 \Leftrightarrow 4y = -6 + 2\sqrt{y} \Leftrightarrow 4y - 2\sqrt{y} + 6 = 0$$

Đặt  $t = \sqrt{y} \geq 0$  nên  $t^2 = y \Leftrightarrow 4t^2 - 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + 3 = 0$

Ta có  $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$  phương trình vô nghiệm

### Câu III: (2,0 điểm).

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d):  $y = 2x - n + 3$  đường thẳng

(d) đi qua điểm A(2;0). thay  $x = 2$  và  $y = 0$  vào ta có  $0 = 4 - n + 3 \Rightarrow n = 7$

Vậy với  $n = 7$  thì đường thẳng (d) đi qua điểm A(2;0).

2) phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :  $x^2 = 2x - n + 3$

Hay  $x^2 - 2x + n - 3 = 0$  ;  $\Delta' = 1 - n + 3 = 4 - n$  . Để phương trình có 2 nghiệm ( hay đường thẳng và pa ra bol cắt nhau tại hai điểm ) khi  $\Delta' > 0$  ;  $4 - n > 0 \Rightarrow n < 4$

theo hệ thức vi ét ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = n - 3 \end{cases} \text{ mà } x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = 16$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_2 - x_2^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_2(x_1 + 2 + x_2) = 16 \Rightarrow 4 - x_2(2 + 2) = 16 \Rightarrow 4 \cdot x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 5$$

mặt khác  $x_1x_2 = n - 3$  Thay vào ta có  $-15 = n - 3 \Rightarrow n = -12 < 4$  Thỏa mãn

Vậy với  $n = -12$  Thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có

hoành độ lần lượt là  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = 16$ .

**Câu IV:** (3,0 điểm)

1) Chứng minh ONFP là tứ giác nội tiếp

Vì P là trung điểm của ME nên  $OP \perp ME$  hay  $QP \perp MF$  tại

$$P \Rightarrow \widehat{FPO} = 90^\circ$$

mặt khác d là tiếp tuyến của (O) tại N nên  $MN \perp FQ$  tại N

$$\Rightarrow \widehat{FNO} = 90^\circ \text{ Nên } \widehat{FPO} + \widehat{FNO} = 90^\circ \text{ vì } \widehat{FPO} \text{ và } \widehat{FNO} \text{ là hai}$$

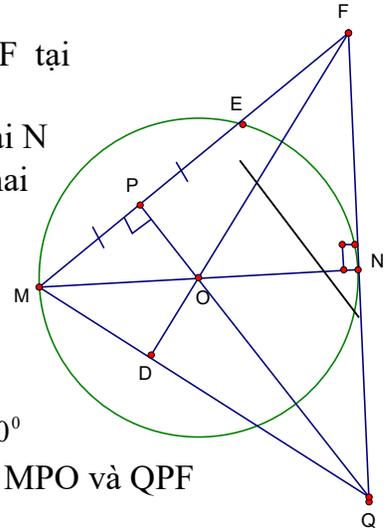
góc đối của tứ giác ONFP nên tứ giác ONFP nội tiếp

2) Xét  $\Delta MFQ$  ta có  $QP \perp MF \Rightarrow QP$  là đường cao

$MN \perp FQ \Rightarrow MN$  là đường cao vì MN cắt QP tại O

nên O là trực tâm của  $\Delta MFQ \Rightarrow OF$  chứa đường cao

$\Delta MFQ$  suy ra  $OF \perp MQ$



Xét 2 tam giác vuông MPO và QPF có  $\widehat{MPO} = \widehat{QPF} = 90^\circ$

$\widehat{PMO} = \widehat{PQF}$  (Cùng phụ với  $\widehat{PFN}$ )  $\Rightarrow$  2 tam giác vuông MPO và QPF

$$\text{đồng dạng} \Rightarrow \frac{PO}{PF} = \frac{MP}{PQ} \Rightarrow PO \cdot PQ = MP \cdot PF$$

3. Xác định vị trí điểm E trên cung MN để tổng  $MF + 2ME$  đạt giá trị nhỏ nhất

Xét 2 tam giác vuông MPO và QNF có  $\widehat{MPO} = \widehat{MNF} = 90^\circ$ ;  $\widehat{M}$  chung

Nên 2 tam giác vuông MPO và MNF đồng dạng (g-g)  $\Rightarrow \frac{MP}{MN} = \frac{MO}{MF}$

$$\Rightarrow MP \cdot MF = MO \cdot MN \Rightarrow 4MP \cdot MF = 4 \cdot MO \cdot MN \Rightarrow (4MP) \cdot MF = 4 \cdot MO \cdot MN$$

$$\Rightarrow 2ME \cdot MF = 4 \cdot MO \cdot MN = 4 \cdot R \cdot 2R = 8R^2$$

Như vậy tích  $2ME$  và  $MF$  không đổi là  $8R^2$

mà  $(MF + 2ME)^2 \geq 4MF \cdot 2ME$  (với  $a, b > 0$  ta luôn có  $(a + b)^2 \geq 4a \cdot b$ )

$$\text{nên } (MF + 2ME)^2 \geq 4MF \cdot 2ME = 4(8R^2) = 32R^2$$

$$\Rightarrow MF + 2ME \geq \sqrt{32R^2} = 4R\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $2ME = MF$  khi đó E là trung điểm của MF mà  $NE \perp MF$  nên tam giác MNF vuông cân suy ra E là điểm chính giữa cung MN

**Câu V:** Nếu với mọi  $x; y; z; t > 0$  ta có :  $(x + y + z + t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$  từ đó ta

$$\text{có } \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{16}{x + y + z + t} \Rightarrow \frac{1}{16} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{1}{x + y + z + t}$$

Thật vậy Ta xét

$$(x + y + z + t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{z} + \frac{z}{t} +$$

$$+ \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + \frac{t}{t} = 4 + \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left( \frac{y}{t} + \frac{t}{y} \right) + \left( \frac{z}{t} + \frac{t}{z} \right)$$

mà tổng nghịch đảo của đôi một không bé hơn 2 (áp dụng co si) dấu = khi  $x = y = z = t$

$$(x + y + z + t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$

$$\Rightarrow (x + y + z + t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16 \text{ vì } x; y; z; t > 0 \Rightarrow \frac{1}{16} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{1}{x + y + z + t}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = z = t$  áp dụng vào bài toán ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c} \\
 &= \frac{1}{b+c+b+c+b+a+c+a} + \frac{1}{a+c+a+c+a+b+b+c} + \frac{1}{a+b+a+b+a+c+b+c} \\
 &\leq \frac{1}{16} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{16} \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \left( \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c+a} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{2017}{4}.
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{4034}.$$

$$\text{Vậy } \text{Max}P = \frac{2017}{4} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{4034}$$