SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: **TOÁN (Chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút.
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

b) Cho $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $S=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\left(\sqrt{x-1}+1\right)=x+\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x-y+2 \\ x^3+y^3=y(x+y+4)+x. \end{cases}$

Câu 3: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b) $AP^2=AQ^2=AE.AC$.

c) Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\dfrac{FP}{PS}=\dfrac{QE}{ES}$.

Câu 4: (1,5 điểm)

a) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right) \vdots ab$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x\left(x^2-y\right)+(y-3)\left(x^2+1\right)=0$.

Câu 5: (1,5 điểm)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 4$. Chứng minh rằng:

$$x^2y+y^2z+z^2x+16 \ge xy^2+yz^2+zx^2.$$

b) Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a và b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\dfrac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\dfrac{1}{2^{11}}$.

--------Hết--------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1.

a Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

b Cho $f(n)=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40).$$

Hướng dẫn.

a Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

Bằng cách quy đồng mẫu số ta được:

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\Rightarrow yz+2zx+3xy=0 \qquad (1).$

Lại có:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2&=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+2\left(\frac{xy}{2}+\frac{yz}{6}+\frac{zx}{3}\right)\\&=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\frac{3xy+yz+2zx}{3}=1 \qquad (2).\end{aligned}$$

Kết hợp (1) và (2) ta được: $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

b Cho $f(n)=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40).$$

Biến đổi:

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{2\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)}{(2n+1)-(2n-1)}(\text{do } \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\neq 0)\\&=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}.\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}S&=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)\\&=\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\cdots+\left(\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)\\&=\sqrt{81}-\sqrt{1}=9-1=8.\end{aligned}$$

Vậy giá trị $S=8$.

Bài 2.

a Giải phương trình $2\left(\sqrt{x-1}+1\right)=x+\sqrt{x+2}$.

b Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x + y + 4) + x. \end{cases}$

Hướng dẫn.

a Giải phương trình $2\left(\sqrt{x-1}+1\right) = x + \sqrt{x+2}$.

Điều kiện tồn tại phương trình: $x \geq 1$.

Biến đổi:

$$\begin{aligned} & 2\left(\sqrt{x-1}+1\right) = x + \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow & \left(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) - (x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} - (x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)\left[\frac{3}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} - 1\right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2} = 3 \qquad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ $(*)$ suy ra $\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow 5x - 2 + 4\sqrt{x^2+x-2} = 9$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+x-2} = 11 - 5x \Rightarrow 16(x^2+x-2) = (11-5x)^2 \qquad (**)$

Giải $(**)$ cho hai nghiệm $x = 7 - 4\sqrt{2}$ và $x = 7 + 4\sqrt{2}$. Thay các nghiệm này vào $(*)$ thì $x = 7 + 4\sqrt{2}$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$; $x = 7 - 4\sqrt{2}$.

b Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x + y + 4) + x. \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = x - y + 2 & (1) \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = xy + y^2 + 4y + x. & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) được: $(x+y)(x-y+2) = xy + y^2 + 4y + x$

$\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -y - 1 \end{array}\right.$

Với $x = 2y$, thay vào (1) ta có:

$4y^2 - 2y^2 + y^2 = y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Khi đó $(x;y) = (2;1)$ và $(x;y) = \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Với $x = -y - 1$, thế vào (1) được:

$(y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = -y - 1 - y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 + 5y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Khi đó $(x;y) = (-1;0)$ và $(x;y) = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x; y) =\in \left\{(2;1), \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right), (-1;0), \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)\right\}$.

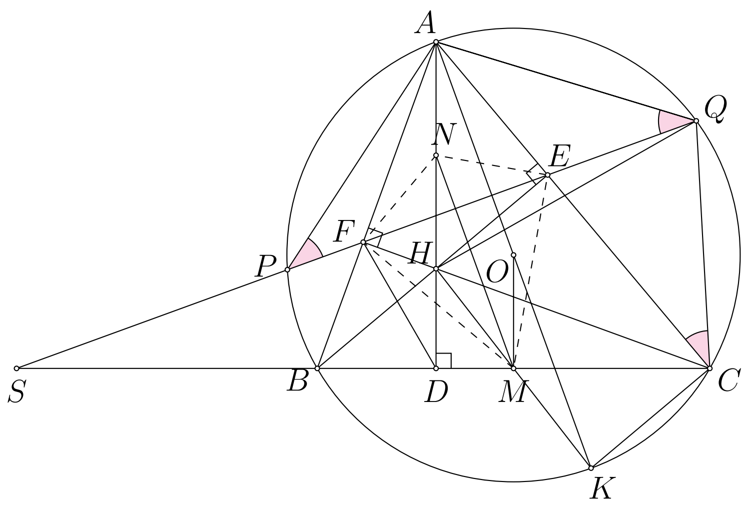
Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:

a Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b $AP^2 = AQ^2 = AE \cdot AC$.

c Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\dfrac{FP}{PS} = \dfrac{QE}{ES}$.

Hướng dẫn. Hình vẽ:



a Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

Kẻ đường kính AK (K nằm trên đường tròn (O)). Khi đó $AC \perp CK$; $BK \perp AB$.

Dễ dàng suy ra $BK // CH$ và $CK // BH$ (cùng vuông góc với một đường thẳng).

Từ đó suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Vì M là trung điểm BC nên $M \in HK$ và $MH = MK$.

Tam giác AHK có M và N lần lượt là trung điểm của HK và AH nên MN là đường trung bình của $\triangle AHK$. Suy ra $MN // AO$ và $MN = \frac{1}{2}AK = AO$.

Vậy $AOMN$ là hình bình hành.

b $AP^2 = AQ^2 = AE \cdot AC$.

Tam giác AFH vuông tại F suy ra $FN = NH$. Tương tự, $\triangle AEH$ vuông tại E nên $NE = NH$. Như vậy $NF = NE$ (1).

Lại có $\triangle BFC$ và $\triangle BEC$ lần lượt vuông tại F và E, có các đường trung tuyến lần lượt là MF và ME. Do đó $MF = ME = \frac{1}{2}BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MN là trung trực của EF. Suy ra $EF \perp MN$ (3).

Lại có $MN // AO$, kết hợp với (3) suy ra $AO \perp EF$ hay $AO \perp PQ$. Suy ra A là điểm chính giữa cung PAQ, suy ra $AP = AQ$ hay cung AQ bằng cung AP.

Mặt khác $\widehat{AQP} = \widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau). Nên $\triangle AQC \backsim \triangle AEQ$.

Suy ra $\dfrac{AE}{AQ}=\dfrac{AQ}{AC}\Rightarrow AE\cdot AC=AQ^2$.

Vậy $AP^2=AQ^2=AE\cdot AC$.

c Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\dfrac{FP}{PS}=\dfrac{QE}{ES}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$.

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC}=\widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{FEM}=180^\circ-\widehat{AEF}-\widehat{MEC}=180^\circ-\widehat{ABC}-\widehat{ACB}=\widehat{BAC}$.

Tứ giác $DFAC$ nội tiếp nên $\widehat{FDM}+\widehat{BAC}=180^\circ$. Suy ra $\widehat{FEM}=\widehat{FDM}=180^\circ$.

Vậy $DMEF$ là tứ giác nội tiếp.

Hai tam giác SDF và SEM có:

$\widehat{SDF}=\widehat{SEM}$; chung $\widehat{DSF}$ nên chúng đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{SD}{SF}=\dfrac{SE}{SM}$ hay $SD\cdot SM=SE\cdot SF$.

Từ tứ giác $BFEC$ nội tiếp, ta cũng suy ra $SE\cdot SF=SB\cdot SC$, tứ giác $BCQP$ nội tiếp ta cũng có $SB\cdot SC=SP\cdot SQ$.

Suy ra $SP\cdot SQ=SE\cdot SF\Rightarrow\dfrac{SF}{SP}=\dfrac{SQ}{SE}$.

Vậy $\dfrac{SF}{SP}-1=\dfrac{SQ}{SE}-1$ hay $\dfrac{SF-SP}{SP}=\dfrac{SQ-SE}{SE}\Rightarrow\dfrac{PF}{PS}=\dfrac{EQ}{SE}$.

Bài 4.

a Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right)\vdots ab$.

b Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$.

Hướng dẫn.

a Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right)\vdots ab$.

Vì $a^3 \vdots b$ nên $a^3.a \vdots b.a$ hay $a^4 \vdots ab$. Tương tự, vì $b^3 \vdots a$ nên $b^3.b \vdots a.b$ hay $b^4 \vdots ab$. Từ đấy suy ra $(a^4+b^4)\vdots ab$.

b Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$.

Từ đề bài $x(x^2-y)+(y-3)(x^2+1)=0$ ta rút ra $y=\dfrac{-x^3+3x^2+3}{x^2-x+1}=-x+2+\dfrac{3x+1}{x^2-x+1}$ (vì $x^2-x+1>0$ với mọi x).

Khi x nguyên, để y là nguyên thì $(3x+1)\vdots(x^2-x+1)$ do đó:

$(3x+1)^2=(9x^2+6x+1)=9(x^2-x+1)+(15x-8)\vdots(x^2-x+1)$ hay $(15x-8)\vdots(x^2-x+1)$.

Suy ra $13=[5(3x+1)-(15x-8)]\vdots(x^2-x+1)$.

Như vậy:

- $x^2-x+1=13\Rightarrow x^2-x-12=0\Rightarrow x=-3$ hoặc $x=4$.
  Với $x=-3$ thì $y=\dfrac{57}{13}$ (không nguyên); với $x=4$ thì $y=-1$ (nguyên).
- $x^2-x+1=1\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x=0$ hoặc $x=1$
  Với $x=0$ thì $y=3$ (nguyên); với $x=1$ thì $y=5$ (nguyên).

Thử lại thấy các nghiệm trên đều thỏa mãn. Vậy có 3 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(0;3)$, $(1;5)$ và $(4;-1)$.

Bài 5.

a Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 4$. Chứng minh rằng:
$$x^2y + y^2z + z^2x + 16 \ge xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

b Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a, b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\dfrac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\dfrac{1}{2^{11}}$.

Hướng dẫn.

a Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 4$. Chứng minh rằng:
$$x^2y + y^2z + z^2x + 16 \ge xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Ta có
$$\begin{aligned} & x^2y + y^2z + z^2x + 16 \ge xy^2 + yz^2 + zx^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2y + y^2z + z^2x + 16 - xy^2 - yz^2 - zx^2 \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)(x-z)(y-z) + 16 \ge 0 \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức
$$ab \ge -\frac{1}{4}(a-b)^2,\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
và
$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4},\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
Trường hợp 1: Nếu $x \ge y$ ta có
$$(x-z)(y-z) \ge -\frac{1}{4}(x-y)^2$$
nên
$$(x-y)(x-z)(y-z) + 16 \ge -\frac{1}{4}(x-y)^3 + 16 \ge -\frac{1}{4}4^3 + 16 \ge 0.$$
Trường hợp 2: Nếu $y > x$ ta xét

Trường hợp 2.1: Nếu $y \ge z$, ta có
$$(x-y)(x-z) \ge -\frac{1}{4}(y-z)^2$$
nến
$$(x-y)(x-z)(y-z) + 16 \ge -\frac{1}{4}(y-z)^3 + 16 \ge -\frac{1}{4}4^3 + 16 \ge 0.$$
Trường hợp 2.2: Nếu $y < z$, ta có
$$(x-y)(x-z)(y-z) + 16 = (y-x)(x-z)(z-y) + 16.$$
Kết hợp với
$$(y-x)(z-y) \le \frac{1}{4}(z-x)^2 \text{ và } x < y < z$$
ta được
$$(y-x)(x-z)(z-y) + 16 \ge \frac{1}{4}(z-x)^2(x-z) + 16 = -\frac{1}{4}(z-x)^3 + 16 \ge 0.$$

Vậy với mọi trường hợp thì $(x-y)(x-z)(y-z)+16 \geq 0$ hay
$$x^2y+y^2z+z^2x+16 \geq xy^2+yz^2+zx^2$$

b Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a, b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\dfrac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\dfrac{1}{2^{11}}$.

Trước hết ta thấy trên bảng luôn là các số dương. Thật vậy, ta sử dụng quy nạp. Ban đầu có 2023 số 1 đều là số dương. Giả sử sau lần biến đổi thứ i, trên bảng đều là số dương. Đến bước biến đổi thứ $i+1$: Ta chọn hai số a, b trên bảng (theo giả thiết quy nạp thì $a, b > 0$), ta xóa hai số đó đi và viết thêm số $\dfrac{a+b}{4}$ cũng là số dương. Vậy, mỗi số được viết trên bảng luôn là các số dương.

Gọi T_i là tổng các nghịch đảo của các số thực còn lại trên bảng sau bước biến đổi thứ i (T_0 là tổng nghịch đảo của các số thực trên bảng khi chưa thực hiện bước biến đổi nào) thì:

Ở bước thứ i ta có tổng T_i. Đến bước thứ $i+1$ ta xóa đi hai số a, b và viết lên bảng số $\dfrac{a+b}{4}$ thì ta có tổng T_{i+1} và:

$$T_{i+1} = T_i - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\dfrac{a+b}{4}}.$$

Suy ra $T_{i+1} - T_i = -\dfrac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \leq 0$ ((Vì a, b đều lớn hơn 0)).

Như vậy: $T_{2022} \leq T_{2021} \leq \cdots \leq T_0$.

Ban đầu, ta có trên bảng 2023 số 1 nên $T_0 = 2023$. Sau 2022 bước thì ta được trên bảng một số x nào đó. Khi đó $T_{2022} = \dfrac{1}{x} \leq T_0 = 2023$.

Vì ban đầu các số trên bảng đều là 1, các bước xóa bỏ và thay thế đều chỉ sử dụng pháp toán cộng và chia, nên sau mỗi bước thay số trên bảng luôn còn lại tất cả các số đều dương. Như vậy $x > 0$.

Từ đó ta có $x \geq \dfrac{1}{2023} > \dfrac{1}{2048} = \dfrac{1}{2^{11}}$.