BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**

**CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
**Độc lập – Tự do – Hạnh phúc**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

# ĐỀ THI TUYỂN SINH
# VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2021
## Môn thi: TOÁN

*(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)*
*Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)*

**Bài 1 (2,0 điểm)**

Cho $P=\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\quad (a\ge 0,\, b\ge 0,\, a\ne b)$.

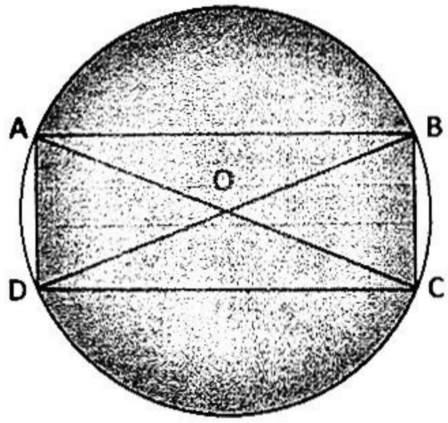
a) Rút gọn $P$.

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

**Bài 2 (3,0 điểm)**

a) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của $m$, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$; $\;x^2-mx+4m-11=0$.

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O, bán kính bằng 1,6 m. Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1,6 m sao cho $\widehat{BOC}=45^o$ (hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần hình tô đậm là 150 nghìn đồng/m$^2$ và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m$^2$. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi=3,14$.




**Bài 3 (3,0 điểm)**

Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (d) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Lấy điểm M tùy ý trên (d). Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AM cắt các đường thẳng AM, (d) lần lượt tại I, N. Đường thẳng MB cắt AN tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác MIKN nội tiếp.

b) Chứng minh rằng CM . CN = AC . BC.

c) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Vẽ hình bình hành MBNE. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và OH = $\dfrac{1}{2}$AB.

**Bài 4 (2,0 điểm)**

a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 \\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1. \end{cases}$

b) Cho a và b là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

---------------------*Hết*---------------------

*Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

| | |
|---|---|
| **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO** |
| **TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM HÀ NỘI** | **TRƯỜNG THPT CHUYÊN** |
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **NĂM HỌC 2021 – 2022** |
| *Đề thi gồm 01 trang* | **MÔN THI: TOÁN** |
| | **Ngày thi: 17/06/2021** |

*Thời gian: 90 phút (không kể thời gian giao đề)*

## Câu 1. (2,0 điểm)

Cho: $P=\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với ( $a\ge 0$; $b\ge 0$ ; $a\ne b$ )

a) Rút gọn $P$.

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

**Lời giải**

a) Rút gọn $P$.

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\qquad \left(a\ge 0,b\ge 0,a\ne b\right)$$

$$P=\left(\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right):\frac{b-2\sqrt{ab}+a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$P=\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{b-\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$P=\left(\frac{a+2\sqrt{ab}+b-\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{b-\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}.$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$.

b) Chứng minh rằng $P\ge 0$.

Ta có: $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b \Rightarrow \sqrt{ab} \geq 0$

$$a - \sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{ab}$$

Ta có: $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{ab} \geq 0 \\ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow a - \sqrt{ab} + b > 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} + b} \geq 0$$

Vậy $P \geq 0$ (đpcm).

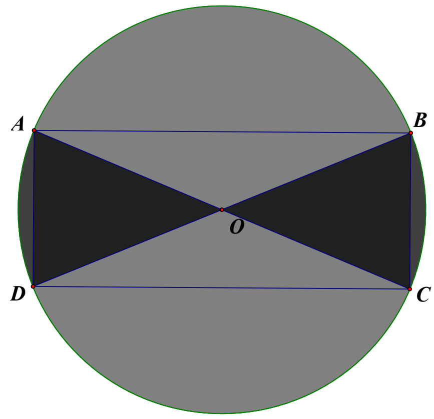
**Câu 2.** **(3,0 điểm)**

a) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của $m$, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$; $x^2 - mx + 4m - 11 = 0$.

2) Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a+b+c) + ab + bc + ca = 9$.

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm $\mathrm{O}$, bán kính bằng $1{,}6\,\mathrm{m}$. Giả sử hình chữ nhật $\mathrm{ABCD}$ nội tiếp đường tròn tâm $\mathrm{O}$ bán kính bằng $1{,}6\,\mathrm{m}$ sao cho $\widehat{BOC} = 45^\circ$ (hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần hình tô đậm là 150 nghìn đồng/ $m^2$ và phần còn lại là 200 nghìn đồng/ $m^2$. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi = 3{,}14$.




**Lời giải**

a) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của $m$, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$; $x^2 - mx + 4m - 11 = 0$.

Xét phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0 \qquad (1)$

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4\left(m^2 + 3\right) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 12 = 4m - 11$.

+ **<u>Trường hợp 1:</u>** $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m - 11 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{11}{4}$.

Khi đó phương trình $(1)$ có nghiệm.

+ **<u>Trường hợp 2:</u>** $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4m - 11 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{11}{4}$.

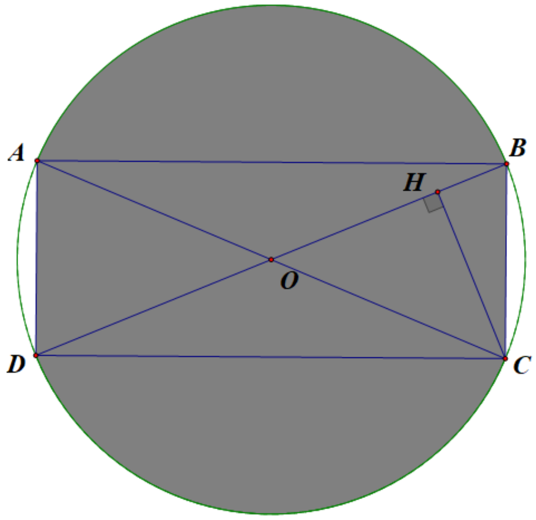
Xét phương trình $x^2 - mx + 4m - 11 = 0 \qquad (2)$

Ta có $a.c = 1.(4m - 11) = 4m - 11 < 0$.

Suy ra phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt.

Như vậy, với mọi giá trị của $m$, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:
$x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$; $x^2-mx+4m-11=0$.

b) Tính số tiền sơn biển quảng cáo.




Diện tích hình quạt $BOC$ là: $\pi R^2\dfrac{n^\circ}{360^\circ}=3,14.1,6^2.\dfrac{45^\circ}{360^\circ}=1,0048\ (\mathrm{m}^2)$.

Diện tích $\Delta BOC$ là: $\dfrac{1}{2}OB.CH=\dfrac{1}{2}OB.OC.\sin\widehat{BOC}=\dfrac{1}{2}.1,6.1,6.\sin 45^\circ\approx 0,905(\mathrm{m}^2)$

Diện tích phần còn lại (không tô màu) là $2.(1,0048-0,905)=0,1996(\mathrm{m}^2)$

Diện tích hình tròn tâm $O$ là: $\pi R^2=3,14.1,6^2=8,0384\ (\mathrm{m}^2)$

Diện tích phần tô màu là: $8,0384-0,1996=7,8388(\mathrm{m}^2)$

Số tiền sơn là: $7,8388.150+0,1996.200=1215,74\approx 1216$ (nghìn đồng).

**Câu 3.** **(3,0 điểm)**

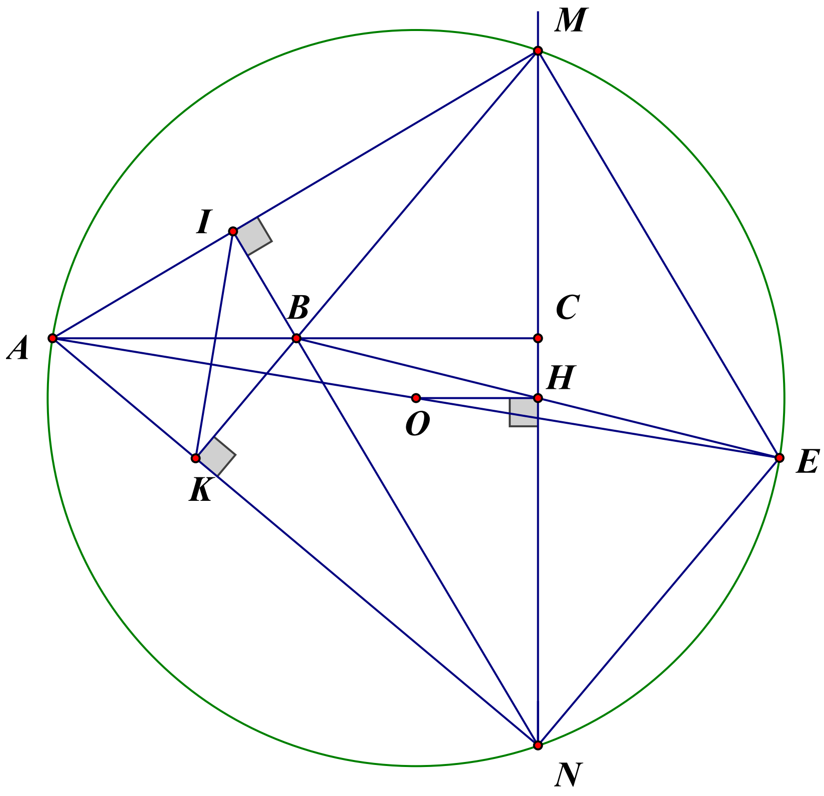
Cho ba điểm $A, B, C$ cố định sao cho $A$, $B$, $C$ thẳng hàng, $B$ nằm giữa $A$ và $C$. Gọi $(d)$ là đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$. Lấy điểm $M$ tùy ý trên $(d)$. Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AM$ cắt các đường thẳng $AM$, $(d)$ lần lượt tại $I$, $N$. Đường thẳng $MB$ cắt $AN$ tại $K$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CM.CN=AC.BC$

c) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Chứng minh rằng $OH$ vuông góc với đường thẳng $(d)$ và $OH = \frac{1}{2}AB$.

**Lời giải**




a) Chứng minh rằng tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

Xét $\Delta AMN$ có $NI \perp AM$, $AC \perp MN$ mà $NI$ cắt $AC$ tại $B$ nên $B$ là trực tâm của $\Delta AMN$.

$\Rightarrow MB \perp AN$ tại $K$.

$\Rightarrow \widehat{MKN} = 90^\circ$ suy ra $K$ thuộc đường tròn đường kính $MN$.

Mà $\widehat{MIN} = 90^\circ$ suy ra $I$ thuộc đường tròn đường kính $MN$.

Suy ra tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CM.CN = AC.BC$

Xét $\Delta MBC$ và $\Delta ANC$ có: $\widehat{MCB} = \widehat{ACN} = 90^\circ$

$\widehat{BMC} = \widehat{NAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ANM}$)

Suy ra $\Delta MBC$” $\Delta ANC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CN} \Leftrightarrow CM \cdot CN = AC \cdot BC.$$

c) Gọi $O$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Chứng minh rằng $OH$ vuông góc với đường thẳng $(d)$ và $OH=\frac{1}{2}AB$.

Vì $BMEN$ là hình bình hành $\Rightarrow ME \parallel BN$.

Mà $BN \perp AM \Rightarrow ME \perp AN \Rightarrow \widehat{AME}=90^\circ$.

Suy ra $AE$ là đường kính của $(O)$, suy ra $O$ là trung điểm của $AE$.

Vì $BMEN$ là hình bình hành, $H$ là trung điểm của $BE$ nên $H$ cũng là trung điểm của $MN$.

$\Rightarrow OH \perp MN$ hay $OH \perp (d)$.

Vì $H$ là trung điểm của $BE$, $O$ là trung điểm của $AE$ nên $OH$ là đường trung bình của $\Delta ABE$.

$\Rightarrow OH=\frac{1}{2}AB$.

**Câu 4. (2,0 điểm)**

a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 \\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1 \end{cases}$

b) Cho $a$ và $b$ là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

**Lời giải**

a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 \ (1) \\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1 \ (2) \end{cases}$

Xét phương trình $(2)$

Với $x<1 \Rightarrow x-2<-1 \Rightarrow |x-2|>1 \Rightarrow |x-2|^{2020}>1 \Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}>1$ không thỏa mãn $(2)$

Với $x>2 \Rightarrow x-1>1 \Rightarrow |x-1|>1 \Rightarrow |x-1|^{2021}>1 \Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}>1$ không thỏa mãn $(2)$

Với $1<x<2 \Rightarrow \begin{cases} -1<x-2<0 \\ 0<x-1<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<|x-2|<1 \\ 0<|x-1|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2|^{2020}<|x-2| \\ |x-1|^{2021}<|x-1| \end{cases}$

$\Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}<|x-1|+|x-2|=x-1+2-x=1 \Rightarrow$ không thỏa mãn $(2)$

Dễ thấy phương trình $(2)$ có hai nghiệm $x=1;x=2$

Với $x=1$ Thay vào $(1)\Rightarrow y=\pm\sqrt{60}$

Với $x=2$ thay vào $(1)\Rightarrow y=\pm\sqrt{61}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(1,\sqrt{60}\right);\left(1,-\sqrt{60}\right);\left(2,\sqrt{61}\right);\left(2,-\sqrt{61}\right)$.

b) Cho $a$ và $b$ là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

Ta có:

$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow 2a^2+3b^2+6ab\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Mà $2a^2+3b^2\in\mathbb{Q}$ và $6ab\in\mathbb{Q}$

Do đó $6ab\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Suy ra $ab=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.$

***__Trường hợp 1:__*** $a=0\Rightarrow b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow b=0$ (do $b\in\mathbb{Q}$).

***__Trường hợp 2:__*** $b=0\Rightarrow a\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=0$ (do $a\in\mathbb{Q}$).

Vậy $a=b=0$ (đpcm).

**HẾT**