

Bài 1: (1,0 điểm) Biết $0 < x \leq y$ và

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2(x + 2y)} + \left[\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right] = \frac{5}{3}. \text{ Tính } \frac{x}{y}$$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}} = x(x-7)$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+3)(x-1) = (y-2)(x+3) \\ (x-1)\sqrt{y^2-5y+8} = (y-2)^2 \end{cases}$$

Bài 3: (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - x + 3m - 11 = 0$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó;

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$.

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Đầu tháng 5 năm 2018 khi đang vào vụ thu hoạch, giá dưa hấu bất ngờ giảm mạnh. Nông dân A cho biết vì sợ dưa hỏng nên phải bán 30% số dưa hấu thu hoạch được với giá 1500 đồng mỗi kilôgam (1500đ/kg), sau đó nhờ phong trào “giải cứu dưa hấu” nên đã may mắn bán hết số dưa hấu còn lại với giá 3500đ/kg; nếu trừ tiền đầu tư thì lãi được 9 triệu đồng (không kể công chăm sóc hơn hai tháng của cả nhà). Cũng theo ông A mỗi sào đầu tư (hạt giống, phân bón, ...) hết 4 triệu đồng và thu hoạch được 2 tấn dưa hấu. Hỏi ông A đã trồng bao nhiêu sào dưa hấu?

b) Một khu đất hình chữ nhật ABCD ($AB < AD$) có chu vi 240 mét được chia thành hai phần gồm khu đất hình chữ nhật ABNM là chuồng trại và phần còn lại làm vườn thả để nuôi gà (M, N lần lượt thuộc cạnh AD, BC). Theo quy hoạch hoạch trang trại nuôi được 2400 con gà, bình quân mỗi con gà cần một mét vuông vườn thả và diện tích vườn thả gấp ba lần diện tích chuồng trại. Tính chu vi của khu đất làm vườn thả?

Bài 5: (3,0 điểm) Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R; $\widehat{CAD} = 45^\circ$, AC vuông góc với BD và cắt BD tại I, $AD > BC$. Dựng CK vuông góc với AD ($K \in AD$), CK cắt BD tại H và cắt (T) tại E ($E \neq C$).

a) Tính số đo \widehat{COD} . Chứng minh các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn và $AC = BD$.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE. Tính IK theo R

c) IK cắt AB tại F. Chứng minh O là trực tâm tam giác AIK và $CK \cdot CB = CF \cdot CD$

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Bài 1: (1,0 điểm)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{5}{3} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2(x+2y)} + \left[\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right] \\ &= \frac{2(x+y)}{3(x+y)} + \frac{y\sqrt{y} + x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2}{3} + \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2}{3} + \frac{x - \sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}} \\ \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}} &= 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \end{aligned}$$

Bài 2: (2,0 điểm) a) ĐK: $x \leq 3$

$$\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}} = x(x-7) \Leftrightarrow x(7-x) \left(\frac{2x}{\sqrt{3-x}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 7-x=0 \\ \frac{2x}{\sqrt{3-x}} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (tm)} \\ x=7 \text{ (loại)} \\ \frac{2x}{\sqrt{3-x}} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$+) \frac{2x}{\sqrt{3-x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -\sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x+1)(4x-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm là } S = \{-1; 0\}$$

$$b) y^2 - 5y + 8 = \left(y - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0; \quad \forall y$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+3)(x-1) = (y-2)(x+3) \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-y+1) = 0 \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-3 \\ x=y-1 \end{cases} \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH: } x = -3; \text{ ta có: } -4\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \quad (*)$$

Vì $-4\sqrt{y^2 - 5y + 8} < 0$; $(y-2)^2 \geq 0$; $\forall y$ nên $(*)$ vô nghiệm

$$+) \text{ TH: } x = y-1; \text{ ta có: } (y-2)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-2-\sqrt{y^2 - 5y + 8}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y-2 = \sqrt{y^2 - 5y + 8} \quad (**) \end{cases}. \text{ Khi } y=2 \Rightarrow x=1$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ (y-2)^2 = y^2 - 5y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow y=4. \text{ Khi } y=4 \Rightarrow x=3$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ và $(3; 4)$

Bài 3: (2,0 điểm)

a) PT (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4(3m - 11) = 0 \Leftrightarrow 12m = 45 \Leftrightarrow m = \frac{15}{4}$

Nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{15}{4}$ thì phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

b) PT (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4(3m - 11) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{15}{4}$

Theo Viét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 3m - 11 \end{cases}$; Theo giả thiết $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2017x_1 + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Khi đó ta có: $3m - 11 = -2 \Leftrightarrow m = 3$ (TMĐK). Vậy $m = 3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$.

Bài 4: (2,0 điểm) a) Gọi x (sào) là số sào dưa hấu ông A đã trồng ($x > 0$)

Khi đó: Số tiền đầu tư là $4x$ (triệu đồng)

Số tiền bán dưa với giá 1500đ/kg là: $\frac{30\% \cdot 2x \cdot 1000 \cdot 1500}{1000000} = 0,9x$ (triệu đồng)

Số tiền bán dưa với giá 3500đ/kg là: $\frac{(1 - 30\%) \cdot 2x \cdot 1000 \cdot 3500}{1000000} = 4,9x$ (triệu đồng)

Theo đề, ta có phương trình $(4,9x + 0,9x) - 4x = 9 \Leftrightarrow 1,8x = 9 \Leftrightarrow x = 5$ (tm)

Vậy ông A đã trồng 5 sào dưa hấu.

b) Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài khu đất hình chữ nhật ABCD ($0 < x < 60; 0 < y < 120$)

Theo đề, ta có $x + y = \frac{240}{2} = 120 \Leftrightarrow y = 120 - x$ (a)

Diện tích vườn thả $S_{CDMN} = 2400 \cdot 1 = 2400m^2$;

Diện tích chuồng trại $S_{ABNM} = \frac{2400}{3} = 800m^2$

Kích thước còn lại của vườn thả $DM = \frac{2400}{x}$ (m)

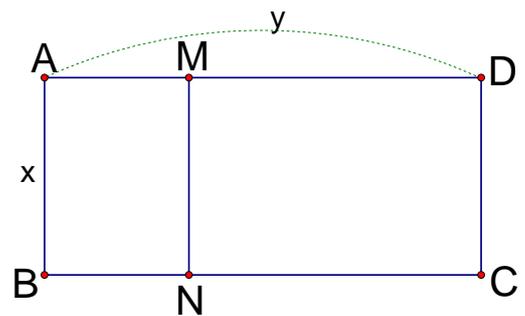
Kích thước còn lại của chuồng trại $AM = \frac{800}{x}$ (m)

Theo đề, ta có: $y = \frac{800}{x} + \frac{2400}{x} \Leftrightarrow y = \frac{3200}{x}$ (b)

Từ a) và b) có: $120 - x = \frac{3200}{x}$

$$\Rightarrow x^2 - 120x + 3200 = 0 \Leftrightarrow (x - 40)(x - 80) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (tm)} \\ x = 80 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy chu vi khu đất làm vườn thả là: $2 \cdot \left(40 + \frac{2400}{40}\right) = 200$ (m)



Bài 5: (3,0 điểm) a) Tính số đo \widehat{COD} . Chứng minh các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn và $AC = BD$.

Ta có: $\widehat{COD} = 2\widehat{CAD} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm)

Tứ giác CDKI có:

$$\widehat{CID} = \widehat{CKD} = 90^\circ \quad (AC \perp BD, CK \perp AD)$$

Vậy tứ giác CDKI là tứ giác nội tiếp, nên các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

ΔAID : $\widehat{AID} = 90^\circ$, $\widehat{IAD} = 45^\circ$ (gt) nên ΔAID vuông cân tại I $\Rightarrow \widehat{ADI} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADI} = 45^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung \widehat{AB} của đường tròn (T))

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CAD} = 45^\circ \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow$ tứ giác ABCD là hình thang

Mặt khác tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp (gt), nên tứ giác ABCD là hình thang cân

$\Rightarrow AC = BD$ (đpcm)

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE. Tính IK theo R

ΔAKC : $\widehat{AKC} = 90^\circ$, $\widehat{KAC} = 45^\circ$ (gt) nên ΔAKC vuông cân tại K $\Rightarrow \widehat{ACK} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{ACK} = \widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow CI$ là phân giác \widehat{BCH}

Mặt khác $CI \perp BH$ (gt) nên ΔBCH cân tại C $\Rightarrow CI$ là trung trực của BH hay CA là trung trực của BH (a)

Chứng minh tương tự có DK là trung trực của EH hay DA là trung trực của EH (b)

Từ a) và b) suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE (đpcm)

* **Tính IK theo R** Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{ACB} + \widehat{ACK} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Nên BE là đường kính của đường tròn (T) $\Rightarrow BE = 2R$

$$\Delta BHE: IB = IH = \frac{1}{2}BH \quad (CI \text{ là trung trực của BH})$$

$$KE = KH = \frac{1}{2}EH \quad (DK \text{ là trung trực của EH})$$

Nên IK là đường trung bình của $\Delta BHE \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \cdot 2R = R$

c) **IK cắt AB tại F. Chứng minh O là trực tâm tam giác AIK và $CK \cdot CB = CF \cdot CD$**

Ta có $IA = ID$ (ΔAID vuông cân tại I), $OA = OD = R$ (gt)

Nên IO là trung trực của AD $\Rightarrow IO \perp AD$ hay $IO \perp AK$ (c)

Tương tự $KA = KC$ (ΔAKC vuông cân tại K), $OA = OC = R$ (gt)

Nên KO là trung trực của AC $\Rightarrow KO \perp AC$ hay $KO \perp AI$ (d)

Từ c) và d) $\Rightarrow O$ là trực tâm ΔAIK (đpcm)

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{ACK} = 45^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung \widehat{AE} của đường tròn (T))

$\widehat{AFK} = \widehat{ABE} = 45^\circ$ (KI // BE, vì IK là đường trung bình của ΔBHE)

Do đó $\widehat{AFK} = \widehat{ACB} = 45^\circ$ hay $\widehat{BFI} = \widehat{BCI} = 45^\circ$, nên tứ giác BICF nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BFC} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Xét ΔBFC và ΔDKC : $\widehat{BFC} = \widehat{DKC} = 90^\circ$ (gt, cmt); $\widehat{CBF} = \widehat{CDK}$ (tứ giác ABCD nội tiếp)

$$\text{Vậy } \Delta BFC \sim \Delta DKC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CB}{CF} = \frac{CD}{CK} \Rightarrow CK \cdot CB = CF \cdot CD \text{ (đpcm)}$$

