SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HCM

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2020-2021

MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

Ngày thi: 17/07/2020

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: *(1,0 điểm)*

Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right):(a+b+c)$.

Câu 2: *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC<CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1,B_1,C_1 lần lượt vuông góc với BC,CA,AB đồng quy.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB,BC,CA lần lượt tại D,E,F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d,BC lần lượt tại L,H.

a) Chứng minh: E,F,L thẳng hàng.

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M,K. Chứng minh: $MH=MK$.

Câu 6: *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình $3^x-y^3=1$.

------------------- HẾT -------------------

Lời giải tham khảo

Câu 1: Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right):\left(a+b+c\right)$.

Hướng dẫn giải

$$P=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right):\left(a+b+c\right)$$

$$=\left[a\left(\frac{a}{b+c}+1-1\right)+b\left(\frac{b}{c+a}+1-1\right)+c\left(\frac{c}{a+b}+1-1\right)\right].\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\left(a.\frac{a+b+c}{b+c}-a+b.\frac{a+b+c}{c+a}-b+c\frac{a+b+c}{a+b}-c\right).\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\left[\left(a+b+c\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)-\left(a+b+c\right)\right].\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-1=2020-1=2019$$

Câu 2: *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

a. $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x^2+x+9}>0 \\ b=\sqrt{2x^2-x+1}>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{2}=x+4$

Khi đó phương trình trở thành

$$a+b=\frac{a^2-b^2}{2} \Leftrightarrow 2(a+b)=(a-b)(a+b) \Leftrightarrow a-b=2 \text{ (do } a+b>0)$$

Do đó

$$\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}=2+\sqrt{2x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+9=4+2x^2-x+1+4\sqrt{2x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-x+1}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 4(2x^2-x+1)=x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 7x^2-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{0;\frac{8}{7}\right\}$.

b. $\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 (1) \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $(y-x)^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 3x - 1 \\ y - x = 1 - 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4x - 1 \\ y = 1 - 2x \end{array}\right.$

Với $y = 4x - 1$, thay vào (2) ta được

$(4x-1)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8x + 7) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 8x + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 7 \Rightarrow y = 27 \end{array}\right.$

Với $y = 1 - 2x$, thay vào (2) ta được

$(1-2x)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0$

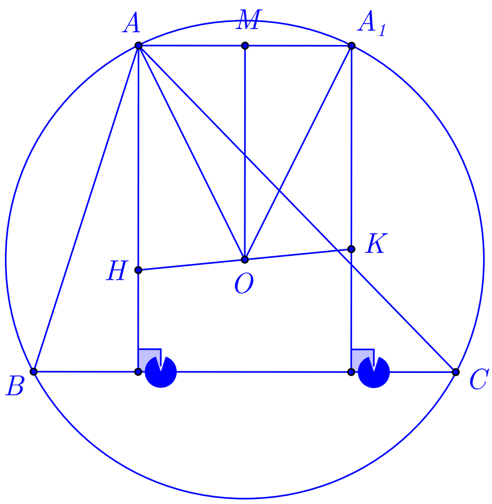
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = 7 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{(0;1),(0;-1),(1;3),(7;27),(-1;3),(-3;7)\}$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < BC < CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và OH cắt đường thẳng qua A_1, vuông góc với BC ở điểm K. Gọi M là trung điểm AA_1 thì $OM \perp AA_1$. Suy ra $OM \perp BC$.

Mặt khác, tứ giác $AHKA_1$ là hình thang vì $AH \parallel A_1K$ nên ta có OM là đường trung bình, kéo theo O là trung điểm HK hay nói cách khác, đường thẳng qua A_1, vuông góc với BC sẽ đi qua điểm đối xứng với trực tâm H của tam giác ABC qua O.

Rõ ràng điểm này bình đẳng với B, C nên hai đường qua B_1, C_1 lần lượt vuông góc với CA, AB cũng đi qua K. Vì thế nên ta có các đường thẳng của đề bài đồng quy ở K.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab + \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b \le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = b - a + \dfrac{20}{a} + \dfrac{7}{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab + \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge ab + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \ge \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2+b^2+2}\right) \ge 0$$

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b \le 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = b - a + \dfrac{20}{a} + \dfrac{7}{b}$.

Ta có: $-a \ge b-3$ nên $Q = b - a + \dfrac{20}{a} + \dfrac{7}{b} \ge b + b - 3 + \dfrac{20}{3-b} + \dfrac{7}{b} = 2b - 3 + \dfrac{20}{3-b} + \dfrac{7}{b}$

$$= 5(3-b) + \frac{20}{3-b} + 7b + \frac{7}{b} - 18 \ge 2\sqrt{5.(3-b).\frac{20}{3-b}} + 2\sqrt{7b.\frac{7}{b}} - 18 = 16$$

$\Rightarrow Q_{\min} = 16$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 5(3-b) = \dfrac{20}{3-b} \\ 7b = \dfrac{7}{b} \end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại L, H.

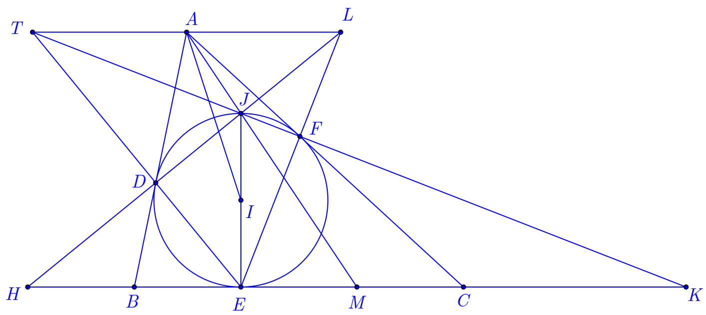
a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng.

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M, K. Chứng minh: $MH = MK$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có JE là đường kính của (I) nên $\widehat{JDE} = 90°$ và tam giác HDE vuông ở D. Chú ý rằng $BD = BE$, do cùng là tiếp tuyến kẻ từ B đến (I) nên $BD = BH$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Do đó tam giác BHD cân ở B.



Vì $AL \parallel BH$ nên hai tam giác ADL và BDH đồng dạng, kéo theo ADL cân ở A hay $AL = AD = AE$.

Vì $AL \parallel CE$ nên $\widehat{LAF} = \widehat{FCE}$, mà hai tam giác ALF, CEF đều cân có các góc ở đỉnh bằng nhau nên chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{AFL} = \widehat{CFE}$, kéo theo L, F, E thẳng hàng.

b) Kéo dài JF cắt d ở T thì tương tự câu a, ta có T, D, E thẳng hàng và

$$AT = AD = AF = AL.$$

Theo định lý Thales với $d \parallel BC$ thì $\dfrac{AL}{MH} = \dfrac{AJ}{JM} = \dfrac{AT}{MK}$, mà $AT = AL$ nên $MH = MK$.

Câu 6: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $3^x = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$. Do đó, tồn tại các số tự nhiên u, v sao cho

$$\begin{cases} y + 1 = 3^u \\ y^2 - y + 1 = 3^v \end{cases}.$$

Vì $y + 1 > 1$ nên $3^u > 1$ hay $u \geq 1$. Rút $y = 3^u - 1$, thay vào phương trình dưới, ta có

$$(3^u - 1)^2 - (3^u - 1) + 1 = 3^v \text{ hay}$$

$$3^{2u} - 3 \cdot 3^u + 3 = 3^v \Leftrightarrow 3^{2u-1} - 3^u + 1 = 3^{v-1}.$$

Vì vế phải nguyên nên ta phải có $v - 1 \geq 0$ hay $v \geq 1$. Tuy nhiên, nếu $v - 1 > 0$ thì 3^{v-1} chia hết cho 3, trong khi vế trái không chia hết cho 3, vô lý. Do đó, $v = 1$ hay

$$y^2 - y + 1 = 3 \Leftrightarrow y^2 - y = 2.$$

Giải ra được $y = 2$. Thay vào đề bài, ta được $3^x = y^3 + 1 = 9$ nên $x = 2$.

Vậy nên tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $(x, y) = (2; 2)$.

-------------------- HẾT --------------------