SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC** **NĂM HỌC 2021 - 2022** **Khóa ngày 05 tháng 6 năm 2021** **Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)** ***Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)***

Câu 1: ***(1,5 điểm)***

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{1}{3\sqrt{x}+3}-\dfrac{1}{3x+3\sqrt{x}}\right)$ $(x>0,\ x\neq 1)$.

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

b) Cho $f(n)=\dfrac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Chứng minh $f(n)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ và $f(1)+f(2)+...+f(2021)<\dfrac{1}{2}$.

Câu 2: ***(1,5 điểm)***

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx+3$ $(m\neq 0)$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $6\ cm^2$ (với O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+(x+1)^2-y(x+1)-1=0\\ x^3-y+1=0\end{cases}$.

Câu 3: ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình $\left(x^2+1\right)\left(2x^2-3\sqrt{2x^2+x+1}+4\right)=1-x$.

b) Tìm m để phương trình $x^3-(m+1)x^2-3x+m+3=0$ (x là ẩn số) có ba nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3$ sao cho biểu thức $P=\dfrac{1}{(x_1+1)^4}+\dfrac{1}{(x_2+1)^4}+\dfrac{1}{(x_3+1)^4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: ***(3,0 điểm)***

Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (BC không phải là đường kính). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi E là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC và F là điểm đối xứng của C qua đường thẳng AB. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EC và FB, H là giao điểm của hai đường thẳng BE và CF.

a) Chứng minh FAHB và ACKF là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh KA là phân giác của góc BKC và ba điểm K, O, A thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của điểm A sao cho tứ giác BKCO có diện tích lớn nhất.

Câu 5: ***(2,0 điểm)***

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của x và y thoả mãn $x^2-2^y.x-4^{21}.9=0$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh :

$$\frac{1}{\sqrt{x(2y+3z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(2z+3x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(2x+3y)}}\geq\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

------ HẾT ------

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{1}{3\sqrt{x}+3}-\frac{1}{3x+3\sqrt{x}}\right)$$

$$A=\left[\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$A=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3-\frac{3}{\sqrt{x}+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\in Ư(3)\Leftrightarrow x\in\{0;4\}$$

KHĐK: $\Longrightarrow x=4.$

b)

Ta có

$$f(n)=\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}$$

Ta có: $2n+1=(n+1)+n\geq 2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}$

$$\Longrightarrow f(n)\leq\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\Longrightarrow f(1)+f(2)+\cdots+f(2021)\leq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2021}}-\frac{1}{\sqrt{2021+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{1}{\sqrt{2022}}\right)<\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$$

Câu 2:

a)

Xét PTHĐGĐ: $x^2-2mx-3=0\ (*)$

$\Delta=m^2+3>0\ \forall m\Longrightarrow$ PT$(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $\Longrightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B.

(d) cắt Oy tại I(0;3)$\Longrightarrow OI=3$

Kẻ AH vuông góc với Oy tại H; BK vuông góc với Oy tại K

$\Longrightarrow AH=|x_1|$ và $BK=|x_2|$

$$S_{OAB}=S_{OAI}+S_{OBI}=\frac{3}{2}|x_1|+\frac{3}{2}|x_2|=6\Longrightarrow|x_1|+|x_2|=4$$

$\Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 16$

$\Longrightarrow 4m^2 + 6 + 2|-3| = 16$

$\Longrightarrow m = \pm 1.$

b)

HỆ PHƯƠNG TRÌNH $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + (x+1)^2 - y(x+1) - 1 = 0 \\ x^3 - y + 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+1)(2x-y) = 0 \\ x^3 = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x^3 - y + 1 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 2x \\ x^3 - y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x^3 - x = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 2x \\ (x-1)(x^2+x-1) = 0 \end{cases}$

...

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \left\{(1;2);(-1;0);(0;1);\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};-1\pm\sqrt{5}\right)\right\}$

Câu 3.

a)

PT $\Leftrightarrow (x^2+1)(2x^2+4-3\sqrt{2(x^2+1)+(x-1)} + (x-1) = 0$

Đặt $a = x^2 + 1 \geq 1$ và $b = x - 1$ PTTT

$a\left(2a + 2 - 3\sqrt{2a+b}\right) + b = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a\sqrt{2a+b} + 2a + b = 0$

$\Leftrightarrow 2a\left(a - \sqrt{2a+b}\right) - \sqrt{2a+b}\left(a - \sqrt{2a+b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(a - \sqrt{2a+b}\right)\left(2a - \sqrt{2a+b}\right) = 0$

TH1: $a = \sqrt{2a+b} \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; 1$

TH2: $2a = \sqrt{2a+b} \Longrightarrow 2x^2 + 2 = \sqrt{2x^2+x+1}$

$\Leftrightarrow 4x^4 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

Vậy $S = \{0; 1\}$.

b)

$x^3 - (m+1)x^2 - 3x + m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 - 3x + 3 - (m+1)x^2 + (m+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - 3 - (m+1)(x+1)] = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x^2 - mx - m - 3 = 0 (*)$

Để phương trình ban đầu có 3 nghiệm pb thì PT(*) có 2 nghiệm pb khác 1

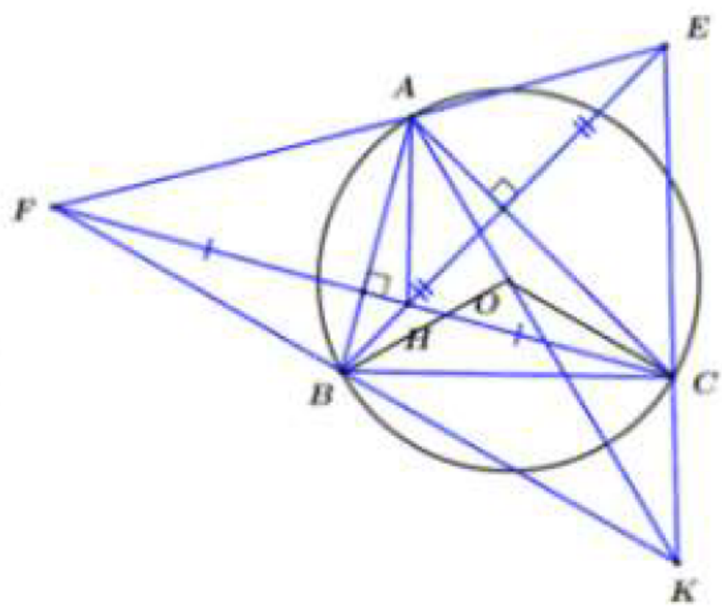
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - m - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -1.$

Giả sử $x_1 = 1; x_2; x_3$ là nghiệm của PT (*)

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2^4} + \frac{2}{(x_2+1)^2(x_3+1)^2} = \frac{1}{16} + \frac{2}{(-m-3+m+1)^2} = \frac{9}{16}$$

Vậy P nhỏ nhất bằng 9/16 khi m=-2.

Câu 4.



a)

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$)

ΔBCF cân tại B(tính chất trung trực)$\Rightarrow \widehat{BCH} = \widehat{BFH}$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BFH}$.

$\Rightarrow$ FAHB là tgnt.

CMTT AHCE là tgnt$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACE} \Rightarrow$ ACKF là tgnt.

b)

Ta có AB là trung trực của CF $\Rightarrow$ AC = AF.

$\Rightarrow \Delta AFC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{ACF}$

Vì ACKF là tgnt$\Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{AKC}$ và $\widehat{ACF} = \widehat{AKF}$.

$\Rightarrow$ KA là phân giác góc BKC.

Vì ACKF là tgnt $\Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{FAC} = 180^0$

Ta có $\widehat{FAC} = 2\widehat{BAC}; \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{BOC}$

$\Rightarrow$ OBKC là tgnt

$\Rightarrow \widehat{BOK} = \widehat{BCK}$

Lại có $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = \widehat{BCE}$

$\Longrightarrow \widehat{BOK} + \widehat{BOA} = \widehat{BCK} + \widehat{BCE} = 180^0$

$\Longrightarrow$ A, O, K thẳng hàng

c)

Ta có OBKC là tgnt; Mà O,B,C cố định nên K thuộc cung lớn của đường tròn ngoại tiếp tg OBC có bán kính không đổi.

$S_{BKOC} = S_{OBC} + S_{KBC}$

Vì S_{OBC} không đổi nên S_{BKCO} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{KBC}$ lớn nhất

Kẻ KM $\perp$ BC, ta có $S_{KBC} = \frac{1}{2}KM.BC$

Vì BC không đổi nên S_{KBC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ KM lớn nhất $\Leftrightarrow$K là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC

$\Longrightarrow$ A là điểm chính giữa cung lớn BC

Câu 5.

a) $\Delta_x = (2^y)^2 + 2^{44}.9$

$\Longrightarrow \Delta_x$ là SCP

$\Longrightarrow (2^y)$^2 + 2^44.9 = a^2

$\Longrightarrow (a + 2^y)(a - 2^y) = 9.2^{44}$

Vì $(a + 2^y) - (a - 2^y) = 2^{y+1}$ không chia hết cho 3 nên 2 số đó không cùng chia hết cho 3

$\Longrightarrow a - 2^y \vdots 9$ hoặc $a + 2^y \vdots 9$

Mà $a + 2^y + a - 2^y = 2a$ là số chẵn $\Longrightarrow a + 2^y$ và $a - 2^y$ cùng tính chẵn lẻ.

$\Longrightarrow a + 2^y$ và $a - 2^y$ cùng chẵn

TH1: $a + 2^y = 9.2^m$ và $a - 2^y = 9.2^n \Longrightarrow 2^{y+1} = 9.2^m - 2^n$

Nếu $m > n$ và $m < n \Longrightarrow$ VP là số lẻ (vô lí)

Nếu $m = n \Longrightarrow m = n = 22$

$\Longrightarrow 2^{y+1} = 2^{25} \Longrightarrow y = 24 \Longrightarrow x = 9.2^{21}$

TH2: Tương tự ta có m,n thuộc rỗng.

Vậy $x = 9.2^{21}$ và $y = 2^{24}$.

b)

$$VT = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x(2y + 3z)}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5y(2z + 3x)}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5z(2x + 3y)}}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{5}}{5x + 2y + 3z} + \frac{2\sqrt{5}}{5y + 2z + 3x} + \frac{2\sqrt{5}}{5z + 2x + 3y} \geq \frac{18\sqrt{5}}{10(x + y + z)} \text{ (Cauchy − Schwarz)}$$

$\Longrightarrow VT \geq \frac{3\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow$ đpcm.