SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH
Năm học: 2021 – 2022
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. **(2, 0 điểm)**

1. Cho $f(x)=x^2-3x-5$ có hai nghiệm là x_1,x_2. Đạt $g(x)=x^2-4$. Tính giá trị của $T=g(x_1)\cdot g(x_2)$.

2. Cho a,b,c la các số thực khác 0 và thỏa mân $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$ 1. Chứng minh rằng $\left(a^3+b^3\right)\left(b^{25}+c^{25}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)=0$.

Bài 2. **(2, 5 điểm)**

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}=3x+9$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+y-1}=3x+y+6 \end{cases}$

Bài 3. **(3, 5 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của các đường thẳng BC và EF, gọi M là giao điểm khác A của SA và đường tròn (O).

a. Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA.
b. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng SH vuông góc với AI.
c. Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Bài 4. **(1, 0 điểm)**

Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.

Bài 5. **(0, 5 điểm)**

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\dfrac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\dfrac{c}{3c^2+2a^2+b^2}$

--------------- Hết -------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TH ÁI B ÌNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Năm học: 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2, 0 điểm)

1. Cho $f(x)=x^2-3x-5$ có hai nghiệm là x_1,x_2. Đặt $g(x)=x^2-4$. Tính giá trị của $T=g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)$.

2. Cho a,b,c la các số thực khác 0 và thỏa mân $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=$ 1. Chứng minh rằng $\left(a^3+b^3\right)\left(b^{25}+c^{25}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)=0$.

Lời giải

1. Cho $f(x)=x^2-3x-5$ có hai nghiệm là x_1,x_2. Đặt $g(x)=x^2-4$. Tính giá trị của $T=g\left(x_1\right).g\left(x_2\right)$.

Vì x_1,x_2 là nghiệm của $f(x)=x^2-3x-5$ nên ta có:

$$\begin{cases}x_1^2-3x_1-5=0\\x_2^2-3x_2-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=3x_1+5\\x_2^2=3x_2+5\end{cases}.$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1x_2=-5\end{cases}$ nên:

$T=g\left(x_1\right).g\left(x_2\right)$

$T=\left(x_1^2-4\right)\left(x_2^2-4\right)$

$T=\left(3x_1+5-4\right)\left(3x_2+5-4\right)$

$T=\left(3x_1+1\right)\left(3x_2+1\right)$

$T=9x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+1$

$T=9\cdot(-5)+3.3+1$

$T=-35$

Vậy $T=-35$.

2. Cho a,b,c là các số thực dương khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1$. Chúng minh rằng $\left(a^3+b^3\right)\left(b^{25}+c^{25}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)=0$

Vì $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1$ nên $a+b+c\neq0\Rightarrow\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a(a+b+c)}+\frac{b+c}{bc}=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\left[\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{bc}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\left[\frac{bc+a^2+ab+ac}{abc(a+b+c)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Vậy $\left(a^3+b^3\right)\left(b^{25}+c^{25}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)=0$ (đpcm).

Bài 2. **(2, 5 điểm)**

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}=3x+9$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+y-1}=3x+y+6 \end{cases}$

Lời giải

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}=3x+9$.

Điều kiện xác định: $x\geq 0$, ta có:

$$4\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}=3x+9$$

$$\Leftrightarrow (x+3-4\sqrt{x+3}+4)+2(x-2\sqrt{x}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2+2(\sqrt{x}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-2=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \quad (\text{tm } DKXD)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+y-1}=3x+y+6 & (2) \end{cases}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x+y-1\ge 0 \\ x+y\ne 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\dfrac{2xy}{x+y}=1$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-2xy(x+y)+2xy=(x+y)$

Đặt $S=x+y, P=xy\left(S^2\ge 4P\right)$ ta có:

$S^3-2SP+2P=S \quad \Leftrightarrow S(S+1)(S-1)-2P(S-1)=0 \quad \Leftrightarrow (S-1)\left(S^2+S-2P\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1 \\ S^2+S-2P=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{array}\right.$

TH1: Với $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được:

$\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+1-x-1}=3x+1-x+6$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$

$\Rightarrow 3x^2+33+2\sqrt{3x^2+33}.3\sqrt{x}+9x=4x^2+28x+49$

$\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+33}\cdot\sqrt{x}=x^2+19x+16$

$\Rightarrow 36\left(3x^2+33\right)x=x^4+361x^2+256+38x^3+32x^2+608x$

$\Leftrightarrow x^4-70x^3+393x^2-580x+256=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)(x-64)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1\Rightarrow y=0 & (TM) \\ x=4\Rightarrow y=-3 & (TM) \\ x=64\Rightarrow y=-63 & (TM) \end{array}\right.$

TH2: Với $x^2+y^2+x+y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x.

Để tồn tại x thì $\Delta=1-4\left(y^2+y\right)\ge 0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-1\le 0$

$\Leftrightarrow 4\left(y+\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\le y\le \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

Tương tự ta cũng có $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $2x+y-1\le 2.\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}-1<0$, không thỏa mãn điều kiện $2x+y-1\ge 0$ nên trường hợp này hệ vô nghiệm.

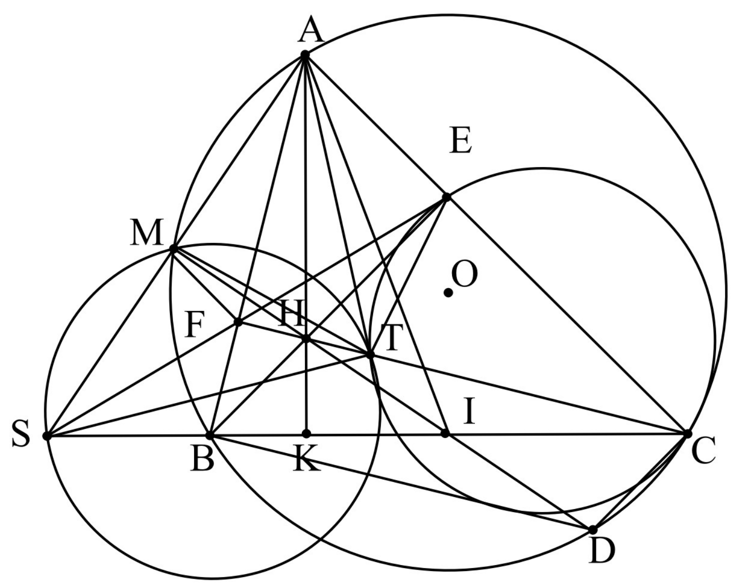
Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1;0),(4;-3),(64;-63)\}$.

Bài 3. **(3, 5 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của các đường thẳng BC và EF, gọi M là giao điểm khác A của SA và đường tròn (O).

a. Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA.
b. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng SH vuông góc với AI.
c. Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA.

Vì $\widehat{AEH}+\widehat{AFH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (dhnb).

Có tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\left(\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ\right)$.

$\Rightarrow \widehat{SFB}=\widehat{SCE}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Xét ΔSBF và ΔSCE có:

$\widehat{SFB}=\widehat{SCE}$ (cmt); góc $\widehat{FSB}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta SBF\#\,\Delta SEC(g.g)\Rightarrow \dfrac{SB}{SE}=\dfrac{SF}{SC}\Rightarrow SB.SC=SF.SE\quad(1)$

Có tứ giác $BCAM$ nội tiếp đường tròn (O) .Xét ΔSBM và ΔSAC có

Góc $\widehat{SBM} = \widehat{SAC}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Góc $\widehat{MSB}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta SBM \# \Delta SAC(g.g) \Rightarrow \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SM}{SC} \Rightarrow SB.SC = SM.SA \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $SF.SE = SM.SA \Rightarrow \dfrac{SF}{SM} = \dfrac{SA}{SE}$, lại có góc $\widehat{MSF}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta SMF \# \Delta SEA(c.g.c) \Rightarrow \widehat{SMF} = \widehat{SEA}$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow$ AMFE là nội tiếp đường tròn

Suy ra 5 điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHM$ nội tiếp đường tròn, suy ra góc $\widehat{HEA} = \widehat{HMS} = 90°$.(góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Suy ra $HM \perp SA$.

b. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng SH vuông góc với AI.

Kéo dài AO cắt đường tròn tại D, khi đó ta có $DC \,//\, BH$ (cùng vuông góc với CA) và DB // CH (cùng vuông góc với BA) nên $BHCD$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm của BC suy ra I là trung điểm của HD, hay I, H, D thẳng hàng.

Lại có $DM \perp AM$ do AD là đường kính, $HM \perp SA$ nên D, H, M thẳng hàng

Vậy bốn điểm D, I, H, M thẳng hàng, suy ra $IM \perp AS$.

Mà $AH \perp SI$ nên H là trực tâm $\Delta ASI \Rightarrow SH \perp AI$.

c. Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Gọi tia AH cắt BC tại K, suy ra tứ giác $HKSM$ nội tiếp do $\widehat{HKS} + \widehat{HMS} = 180°$.

Xét ΔAMH và ΔAKS có: $\widehat{SAH}$ chung; $\widehat{AMH} = \widehat{AKS} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AMH \# \Delta AKS(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{AM}{AK} \Rightarrow AH.AK = AM.AS \quad (3)$

Tương tự ta có tứ giác $HKEC$ nội tiếp suy ra

$\Delta AEH \# \Delta AKC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AK} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AK \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $AM.AS = AE.AC$.

Theo giả thiết, $\widehat{ATB} = \widehat{AEB} = 90° \Rightarrow AETB$ là tức giác nội tiếp, suy ra $\widehat{ATE} = \widehat{ABE}$,

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{ACT} \Rightarrow \widehat{ATE} = \widehat{ACT}$, lại có $\widehat{TAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACT \# \Delta ATE(g.g) \Rightarrow \dfrac{AT}{AE} = \dfrac{AC}{AT} \Rightarrow AE \cdot AC = AT^2$

Vì $\widehat{ATE} = \widehat{ACT}$ (cmt) nên AT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của ΔCET (1)

Lại có $AM.AS = AE.AC = AT^2 \Rightarrow \dfrac{AM}{AT} = \dfrac{AT}{AS}$.

Xét ΔATM và ΔAST có: $\widehat{SAT}$ chung; $\dfrac{AM}{AT} = \dfrac{AT}{AS}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ATM \# \Delta AST (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ATM} = \widehat{AST}$ (2 góc tương ứng).

Suy ra AT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của ΔSMT (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ΔSMT và ΔCET tiếp xúc với nhau.

Bài 4. **(1, 0 điểm)**

Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 và $4n^3 - 5n - 1$ là số chính phương.

Ta có $4n^3 - 5n - 1 = (n+1)\left(4n^2 - 4n - 1\right)$

Đặt UCLN $\left(n+1; 4n^2 - 4n - 1\right) = d \left(d \in \mathbb{N}^*\right)$

Suy ra $\begin{cases} n+1 \vdots d \\ 4n^2 - 4n - 1 \vdots d \end{cases}$

Có $4n^2 - 4n - 1 = 4n(n+1) - 8(n+1) + 7 \vdots d \Rightarrow 7 \vdots d$

Vì $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 7, suy ra $n+1$ không chia hết cho 7, suy ra $d \neq 7 \Rightarrow d = 1$.

Do đó, $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là số chính phương suy ra $n+1$ và $4n^2 - 4n - 1$ là các số chính phương.

Suy ra $4n^2 - 4n - 1 = a^2 (a \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (2n-1)^2 - a^2 = 2 \Leftrightarrow (2n-a-1)(2n+a-1) = 2$

Vì $2n - a - 1 \le 2n + a - 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n - a - 1 = 1 \\ 2n + a - 1 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n - a - 1 = -2 \\ 2n + a - 1 = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = \dfrac{5}{4} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} n = -\dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right., \text{không thoả mãn } n, a \text{ là các số tự nhiên.}$$

Vậy giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. **(0, 5 điểm)**

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2=3abc \Leftrightarrow \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=3$

Áp dung bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{b}{ca}}=\frac{2}{c}$

$\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq 2\sqrt{\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{a}$

$\frac{a}{bc}+\frac{c}{ab}\geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{b}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có:

$3a^2+2b^2+c^2=2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\geq 4ab+2ac$

$\Rightarrow \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}\leq \frac{a}{4ab+2ac}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}$

Áp dụng Cauchy – Schwarz ta có: $\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{b+b+c}\Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}\leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}\leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$; $\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Suy ra $T\leq \frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq \frac{1}{6}.3\Rightarrow T\leq \frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của T là $\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.