SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO **BÌNH ĐỊNH**	**KỲ THI TUYỂN SINH VẢO LỚP 10 THPT** **NĂM HỌC 2022-2023**
Để chính thức	**Môn thỉ chuyên: TOÁN** (CHUYÊN TOÁN) **Ngày thi: 11/6/2022** *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Bài 1: (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = x^{2022} \cdot \sqrt{x} - 5x^{2020} \cdot \sqrt{x} + x^2 + 2017$.

Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$. Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.

Bài 2: (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases}$

2. Cho a, b, c là các số nguyên.

Đặt $S = (a+2021)^5 + (2b-2022)^5 + (3c+2023)^3; P = a + 2b + 3c + 2022$

Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chi khi P chia hết cho 30 .

Bài 3: (1,0 điểm)

Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lởn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 100$.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung diểm BC .

a) Chứng minh tứ giác DMEF là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm P, H, M, K thẳng hàng.

c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau ở N . Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy.

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho 2 số x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = x^2 + y^2 - xy$

---------HẾT---------

Đáp án

Bài 1: (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức $P = x^{2022}\sqrt{x} - 5x^{2020}\sqrt{x} + x^2 + 2017$. Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

2. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2+\sqrt{5}$. Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.

Lời giải.

1. Ta có $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x^3 = (2+\sqrt{5}) - (2-\sqrt{5}) - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})$
$\Rightarrow x^3 = 2\sqrt{5} + 3x$
$\Rightarrow (x-\sqrt{5})\left(x^2 - \sqrt{5}x + 2\right) = 0.$

Chú ý rằng $x^2 - \sqrt{5}x + 2 = \left(x - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên từ đây chỉ có thể $x = \sqrt{5}$.

Thế nên $P = x^{2020}\sqrt{x}\left(x^2 - 5\right) + x^2 + 2017 = 2022$.

2. Bằng tính toán trực tiếp, ta tính được $x_0^3 = 38 + 17\sqrt{5}; x_0^2 = 9 + 4\sqrt{5}$. Vì x_0 là nghiệm của phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ nên

$x_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0$
$\Rightarrow (38 + 17\sqrt{5}) + b(9 + 4\sqrt{5}) + c(2+\sqrt{5}) + 1 = 0$
$\Rightarrow (39 + 9b + 2c) + (17 + 4b + c)\sqrt{5} = 0.$

Ta thấy rằng nếu $17 + 4b + c \neq 0$ thì $\sqrt{5} = \dfrac{39 + 9b + 2c}{17 + 4b + c} \in \mathbb{Q}$ do b, c là số nguyên, điều vô lí. Do đó $17 + 4b + c = 0$, kéo theo $39 + 9b + 2c = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4b + c + 17 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$.

Với $(b;c) = (-5;3)$ thì phương trình trở thành $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x - 1\right)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{5} \\ x = 2-\sqrt{5} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy với $(b;c) = (-5;3)$, ngoài nghiệm $x_0 = 2+\sqrt{5}$ thì PT còn nghiệm $x_1 = 2-\sqrt{5}$ và $x_2 = 1$.

Bài 2: (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trinh $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y-2=0 \end{cases}$.

2. Cho a,b,c là các số nguyên. Đặt $S=(a+2021)^5+(2b-2022)^5+(3c+2023)^5$; $P=a+2b+3c+2022$. Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chi khi P chia hết cho 30 .

Lời giải.

1. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0(1) \\ y(x+y)^2-2x^2-7y-2=0(2) \end{cases}$

Nhân hai vố phương trình (1) với 2 , ta được

$2x^2+2xy+2y^2-8y+2=0(3)$

Cộng theo vế phương trình (2) và (3) ta được

$$y(x+y)^2+2xy+2y^2-15y=0$$
$$\Leftrightarrow y\left[(x+y)^2+2(x+y)-15\right]=0$$
$$\Leftrightarrow y(x+y-3)(x+y+5)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=3-y \\ x=-5-y \end{array}\right.$$

- Nếu $y=0$ thay vào phương trình (1) ta được $x^2+1=0$, không có nghiệm thực.

- Nếu $x=3-y$, thay vào phương trình (1) ta được $(3-y)\cdot 3+y^2-4y+1=0$

$\Leftrightarrow y^2-7y+10=0 \Leftrightarrow (y-2)(y-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=5 \end{array}\right.$

Với $y=2$ thì $x=1$; với $y=5$ thì $x=-2$.

- Nếu $x=-5-y$, thay vào phương trình (1) ta được $(-5-y)\cdot(-5)+y^2-4y+1=0$

$\Leftrightarrow y^2+y+26=0$, không có nghiệm thực vì $y^2+y+26=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{103}{4}>0$.

Vậy hệ phương trình ban đầu có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2)$ và $(x;y)=(-2;5)$.

2. Đặt $x=a+2021; y=2b-2022; z=3c+2023$ thì $S=x^5+y^5+z^5$ và $P=x+y+z$.

Ta có $S-P=\left(x^5-x\right)+\left(y^5-y\right)+\left(z^5-z\right)$.

Xét $A=x^5-x=x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

Ta thấy $(x-1)x(x+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên có tích chia hết cho 6 , do vậy A chia hết cho 6. Theo định lý Fermat, ta cũng có $x^5=x(\bmod 5)$ nên A chia hết cho 5. Mà ƯCLN $(5,6)=1$ nên $A=x^5-x$ chia hết cho 30 .

Hoàn toàn tương tự $\left(y^5-y\right)$ và $\left(z^5-z\right)$ cùng chia hết cho 30 . Do vậy $(S-P)$ chia hết cho 30 . Điều này cho biết S chia hết cho 30 khi và chi khi P chia hết cho 30 .

Bài 3: (1,0 điểm)

Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3)=100$.

Lời giải.

- Xét đa thức $P(x)=C$ là hằng số thì chỉ có đa thức $\mathrm{P}(\mathrm{x})=100$ thỏa mãn.

- Xét đa thức $P(x)=ax+b$ với $a>0;b\geq 0;a,b\in\mathbb{Z}$.

Ta có $\mathrm{P}(3)=100$ hay $3a+b=100$, mà $a\in\mathbb{N}^*;b\in\mathbb{N}$ nên $1\leq a\leq 33$. Với mỗi a như vậy ta tìm được duy nhất $b=100-3a$ thỏa mãn điều kiện nên trường hợp này có tất cả 33 đa thức thỏa đề bài.

Xét đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\in\mathbb{N}^*;b,c\in\mathbb{N}$. Theo đề bài ta có $9a+3b+c=100$, mà a,b,c là các số nguyên nên $c=3k+1$ với $k\in\mathbb{N}$ (với mỗi giá trị của k thì ta tìm được duy nhất một giá trị của c).

Khi đó $3a+b+k=33$ hay $b+k=33-3a\geq 0$, suy ra $1\leq a\leq 11$.

Với mỗi giá trị a như vậy, có $(34-3a)$ giá trị nguyên của b nhận từ 0 đến ($33-3a$) và có duy nhất một giá trị $k=33-3a-b$ thoả mãn sau khi đã chọn a và b. Vậy trường hợp này có $\sum_{a=1}^{11}(34-3a)=34\cdot 11-3\cdot\dfrac{12\cdot 11}{2}=176$ cặp $(a;b;k)$ thoả mãn, ứng với 176 cặp $(a;b;c)$ thoả mãn đề bài. Trường hợp này có 176 đa thức thoả mãn.

Từ ba trường hợp trên, có tất cả $1+33+176=210$ đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên không âm và $P(3)=100$.

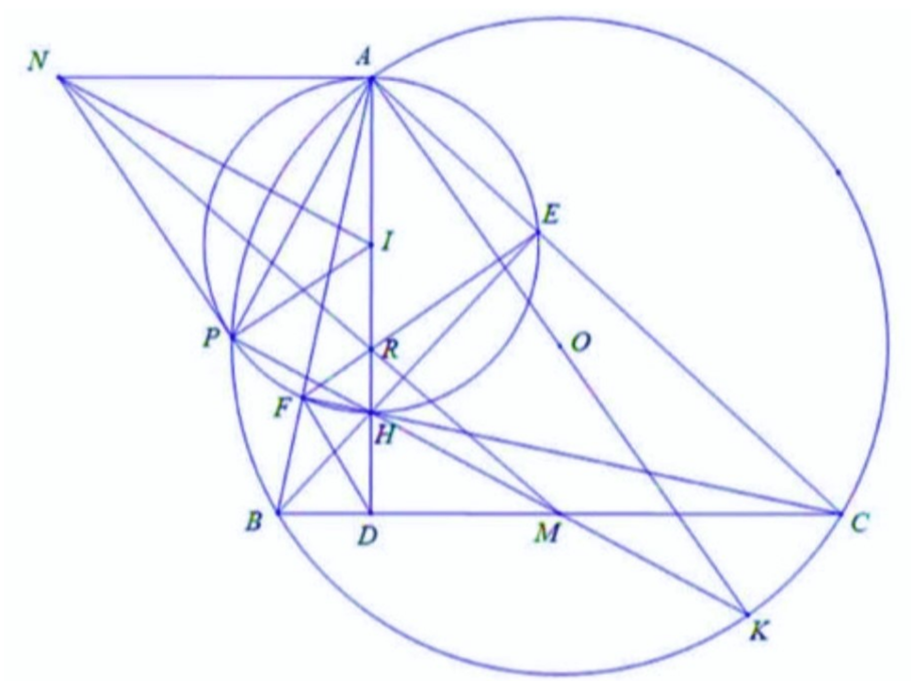
Bài 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn (AB<AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh tứ giác DMEF là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh bốn điểm P, H, M, K thẳng hàng.

c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau ở N. Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy.



Lời giải.

a) Ta thấy các tứ giác BCEF, ACDF nội tiếp đường tròn đường kinhh BC, AC. Khi đó

$$\widehat{MEF} = 180^0 - \widehat{AEF} - \widehat{MEC} = 180^0 - \widehat{ABC} - \widehat{MCE}$$
$$= 180^0 - \widehat{FBD} - \widehat{BFD} = \widehat{BDF}.$$

Do vậy tứ giác DMEF nội tiếp.

b) Theo giả thiết $KB \perp AB$ và $HC \perp AB$ nên $KB//HC$. Tương tư $KC \perp AC$ và $HB \perp AC$ nên $KC//HB$. Tứ giác KBHC có hai cặp cạnh đối diện song song nhau nên là hình bình hành. Lại vì M là trung điểm của BC nên H, M, K thẳng hàng.

Mặt khác, $\widehat{APH} = \widehat{AFH} = 90^\circ = \widehat{APK}$ nên P, H, K thẳng hàng.

Như vậy H, M, K, P thẳng hàng.

c) Gọi R là giao điểm của AD và EF. Vì các tứ giác AFDC, AEDB nội tiếp nên

$$\widehat{EDF} = 180^0 - \widehat{FDB} - \widehat{EDC} = 180^0 - 2\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{FIE}.$$

Do vậy IEDF là tứ giác nội tiếp, suy ra $RE.RF = RI.RD$.

Mặt khác tứ giác AEHF nội tiếp nên $RE \cdot RF = RH \cdot RA$. Vậy nên

$$RI \cdot RD = RH \cdot RA \Rightarrow \frac{RA}{RI} = \frac{RD}{RH}$$
$$\Rightarrow \frac{IA}{RI} = \frac{HD}{RH} \Rightarrow \frac{IA}{HD} = \frac{RI}{RH} = \frac{RA}{RD} (1)$$

Từ chứng minh ở câu b) ta có $HM \perp AP$, lại vì $NI \perp AP$ (do NI là đường trung trực của đoạn AP) nên HM // NI, kết hợp $NA//DM$ suy ra $\widehat{DMH} = \widehat{INA}$ (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng song song). Từ đây $\Delta DHM \backsim \Delta AIN$ (tam giác vuông có hai góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow \dfrac{IA}{HD} = \dfrac{AN}{DM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{RA}{RD} = \dfrac{AN}{DM}$. Vậy nên $\Delta ARN \backsim \Delta DRM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ARN} = \widehat{DRM}$.

Vì $\widehat{NRM} = \widehat{NRA} + \widehat{ARM} = \widehat{MRD} + \widehat{ARM} = \widehat{ARD} = 180^0$ nên M, N, R thẳng hàng, tức là MN cũng đi qua điểm R. Vậy MN, AD, EF đồng quy.

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho hai số x, y thoả mãn: $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = x^2 + y^2 - xy$.

Lời giải. Ta có bất đẳng thức $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Bởi vậy từ giả thiết,

$$(x+y)^2 = 3 + xy \le 3 + \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow 0 \le (x+y)^2 \le 4.$$

Lại để ý đẳng thức $3\left(x^2 + y^2 + xy\right) - \left(x^2 + y^2 - xy\right) = 2(x+y)^2$ hay $0 \le 9 - T = 2(x+y)^2 \le 8$, vậy $1 \le T \le 9$.

Khi $(x;y) = (1;1)$ (thoả mãn giả thiết) thì $T = 1$.

Khi $(x;y) = (\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ (thoả mãn giả thiết) thì $T = 9$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của T là 9 ; giá trị nhỏ nhất của T là 1 .