SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2022-2023

Môn thi : **TOÁN** (chuyên)
Thời gian : **150** phút (không kể thời gian giao đề)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{x+3\sqrt{x}}{2x}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị của biểu thức $\dfrac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố.

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Cho phương trình $(5-m)x^2+(n-3m)x+5+m=0$, với m và n là các tham số. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m;n)$ sao cho phương trình đã cho có nghiệm kép.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=\dfrac{2}{3}x^2$, với O là gốc tọa độ. Tìm tọa độ hai điểm A, B trên (P) sao cho tam giác OAB vuông tại O và khoảng cách từ O đến AB lớn nhất.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2-10x+11+4\sqrt{2x+1}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^4-14x^3y+31x^2y^2-90xy+66=0\\ x^2y-2x^2-2y^2+(y-1)(y^2+y+2)=0.\end{cases}$

Bài 4. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $a^3=(b^2+a)b+5$.

b) Cho phương trình $x^2-2x+k^2-3k-9=0$, với k là tham số. Khi phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{x_1^2+x_2-x_1+k+10}+\sqrt{x_2^2-2x_2+1}$.

Bài 5. (1,5 điểm)

Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm A nằm trên đường tròn. Đường tròn $(A;R)$ cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Gọi M là trung điểm của AB, tia MO cắt (O) tại điểm D. Tia BO cắt AD tại E và cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Tính độ dài đoạn thẳng DE và diện tích tứ giác ACFE theo R.

Bài 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$, trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC và K là hình chiếu của H trên AM. Tia AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng tứ giác ABNC là hình bình hành.

----- **HẾT**-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{x+3\sqrt{x}}{2x}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $\dfrac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Điều kiện xác định : $x>0$ và $x\neq 1$.

Ta có: $P=\left[\dfrac{x+3\sqrt{x}-1+x-1-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\right]:\dfrac{x+3\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$P=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

Thay $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ vào biểu thức $\dfrac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ ta được:

$$\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P}=\frac{2\sqrt{x}-3.\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}}{2.\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}}=\frac{1-\dfrac{3}{x+\sqrt{x}+1}}{\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}}=\frac{x+\sqrt{x}-2}{2}.$$

Do biểu thức $\dfrac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố nên $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{2}$ cũng là số nguyên tố

Ta đặt: $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{2}=p$ (p là số nguyên tố) $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=2p$.

Để ý: $\sqrt{x}+2>\sqrt{x}-1$.

Do đó sẽ có hai khả năng: $\begin{cases}\sqrt{x}-1=1\\ \sqrt{x}+2=2p\end{cases}\left(\sqrt{x}>0,p\geq 1\right)$ hoặc $\begin{cases}\sqrt{x}-1=2\\ \sqrt{x}-2=p\end{cases}\left(\sqrt{x}>0,(2,p)=1,p>2\right)$.

Khả năng 1: $\begin{cases}\sqrt{x}-1=1\\ \sqrt{x}+2=2p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ p=2\end{cases}$ (nhận).

Khả năng 2: $\begin{cases}\sqrt{x}-1=2\\ \sqrt{x}+2=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ p=5\end{cases}$ (nhận).

Vậy $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ và khi $x=4$ và $x=9$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố.

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Cho phương trình $(5-m)x^2+(n-3m)x+5+m=0$, với m và n là các tham số. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m;n)$ sao cho phương trình đã cho có nghiệm kép.

b) Trong mặt phải tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=\dfrac{2}{3}x^2$, với O là gốc tọa độ. Tìm tọa độ hai điểm A,B trên P sao cho tam giác OAB vuông tại O và khoảng cách từ O đến AB lớn nhất.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $m\neq 5$

Ta có: $\Delta=(n-3m)^2-4(25m-m^2)$.

Để phương trình có nghiệm kép thì: $\Delta=0\Leftrightarrow(n-3m^2)-4(25-m^2)=0\Leftrightarrow(n-3m^2)=4(25-m^2)$ (*)

$\Leftrightarrow 25-m^2$ là số chính phương.

Đặt $25-m^2=a^2\,(a\in\mathbb{Z})$

Xét $a=0$ thì $\left[\begin{array}{l} m=5 \text{ và } n=15 \\ m=-5 \text{ và } n=-15 \end{array}\right.$.

Xét $a=1$ thì $m^2=24$ mà 24 không phải là số chính phương nên vô lí.

Xét $a^2=4$ thì $m^2=21$ mà 21 không là số chính phương nên vô lí.

Xét $a^2=9$ thì $m^2=16$ nên $\left[\begin{array}{l} m=4 \text{ và } n=12 \\ m=-4 \text{ và } n=-12 \end{array}\right.$.

Xét $a^2=16$ thì $m^2=9$ nên $\left[\begin{array}{l} m=3 \text{ và } n=9 \\ m=-3 \text{ và } n=-9 \end{array}\right.$.

Xét $a^2=25$ thì $m^2=0$ nên $m=0$ và $n=0$.

Vậy để các cặp số nguyên m, n thỏa đề là: $(m;n)=(3;9)=(-3;-9)=(4;12)=(-1;-12)=(0;0)$.

Câu 3: (2 điểm)

a) Giải phương trình $x^2-10x+11+4\sqrt{2x+1}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^4-14x^3y+31^2y^2-90xy+66=0 \\ x^2y-2x^2-2y^2+(y-1)(y^2+y+2)=0 \end{cases}$.

Lời giải:

a) $x^2-10x+11+4\sqrt{2x+1}=0$.

Điều kiện: $x\geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình (*) tương đương với: $(x-4)^2=\left(\sqrt{2x+1}-2\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=\sqrt{2x+1}-2 \\ x-4=-\sqrt{2x+1}+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{2x+1} \\ 6-x=\sqrt{2x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\geq 0 \\ (x-2)^2=2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x\geq 0 \\ (6-x)^2=2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=7-\sqrt{14} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\left\{3+\sqrt{6};7-\sqrt{14}\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^4-14x^3y+31^2y^2-90xy+66=0 \ \ (1) \\ x^2y-2x^2-2y^2+(y-1)(y^2+y+2)=0. \ \ (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) ta có: $x^2y-2x^2-2y^2+(y-1)(y^2+y+2)=0$

$\Leftrightarrow x^2y-2x^2-2y^2+y^3-1+y-1=0 \Leftrightarrow x^2(y-2)+y^2(y-2)+y-2=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2+1)(y-2)=0$

Vì $x^2+y^2+1>0 \Rightarrow y=2$

Thay vào (1) ta được: $2x^4-14x^3y+31x^2y^2-90xy+66=0$

$\Leftrightarrow 2x^4-28x^3+124x^2-180x+66=0 \Leftrightarrow x^4-14x^3+62x^2-90x+33=0$

$\Leftrightarrow x^4-14x^3+62x^2-90x+33 \Leftrightarrow x^4-8x^3+11x^2-6x^3+48x^2-66x+3x^2-24x+33=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-8x+11)-6x(x^2-8x+11)+3(x^2-8x+11)=0 \Leftrightarrow (x^2-8x+11)(x^2-6x+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+11=0 \\ x^2-6x+3=0 \end{array}\right.$.

Tự giải phương trình bậc hai ra được các cặp số x, y thỏa đề là :

$$(x;y)=\left(4+\sqrt{5};2\right),\left(4-\sqrt{5};2\right),\left(3+\sqrt{6};2\right),\left(3-\sqrt{6};2\right)$$

Câu 4: (2 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $a^3=(b^2+a)b+5$.

b) Cho phương trình $x^2-2x+k^2-3k-9=0$, với k là tham số. Khi phương trình đã cho có hai nghiệm $x_{1,}x_2$ hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{x_1^2+x_2-x_1+k+10}+\sqrt{x_2^2-2x_2+1}$.

Lời giải:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $a^3=(b^2+a)b+5$.

Ta có: $a^3=(b^2+a)b+5 \Leftrightarrow a^3-b^3=ab+5$ (*) $\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=ab+5$.

Trường hợp 1: $a>b$

$\Rightarrow ab+5>a^2+ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2\le 5$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,\ b=1 \text{ (lấy)} \\ a=1;\ b=-2 \text{ (loại)} \\ a=-1;\ b=-2 \text{ (lấy)} \\ a=-2;\ b=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $a<b$

Gọi $d=(a,b)$ thì ta có: $\begin{cases} a=dm_1 \\ b=dm_2 \end{cases}(m_1,m_2)=1$ và $m_2>m_1$.

Thay vào (*) ta được: $d^3m_1^3-d^3m_2^3=d^2m_1m_2+5 \Leftrightarrow d^2(m_1^3-m_2^3-m-m_1m_2)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2=1 \\ (m_1^3-m_2^3-m_1m_2=5 \end{cases}$.

Từ đây ta sẽ có được: $m_1^3=m_2^3+m_1m_2+5$

Nếu $m_1m_2>0$ thì $m_1^3>m_2^3$ (Vô lí)

Do đó $m_1m_2<0$ hay $a<0$ và $b>0$

Ta lại có: $a^3=(b^2+a)b+5$

VT < 0 mà VP > 0 do đó trường hợp này không có cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa đề

Vậy cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa đề là $(a;b)=(2;1)=(-1;-2)$

b) $\Delta'=1-(k^2-3k-9)\ge 0 \Leftrightarrow k^2-3k-10\le 0 \Leftrightarrow (k-5)(k+2)\le 0 \Leftrightarrow -2\le k\le 5$.

Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \Leftrightarrow x_2=2-x_2 \\ x_1x_2=k^2-3k-9 \end{cases}$

Thay Q vào ta được: $\sqrt{(2-x)^2+x_2-(2-x_2)+k+10}+\sqrt{(x-1)^2}$

$=\sqrt{x_2^2-2x_2+1+k+11}+\sqrt{(x_2-1)^2}\ge\sqrt{11-2}=3$.

Vậy $Q_{\min}=3$ khi $k=-2$ và $x_1=x_2=1$.

Ta xét: $x_1^2+x_2-x_1+k+10=x_1^2-2x_1+(x_1+x_2)+k+10$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1^2-2x_1=9+3k-k^2$

Thế vào trên $\Rightarrow 9+3k-k^2+2+k+10=-k^2+4k+21$

Xét $x_2^2-2x_2+1$ tương tự như thế x_2 cũng là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow x_2^2-2x_2^2+1=10+3k-k^2 \Rightarrow Q=\sqrt{-k^2+4k+21}+\sqrt{-k^2 3k+10}$

$=\sqrt{(5-k)(k+2)}+\sqrt{(7-k)(k+3)}\le\sqrt{(5-k+k+3)(k+2+7-k)}=6\sqrt{2}$

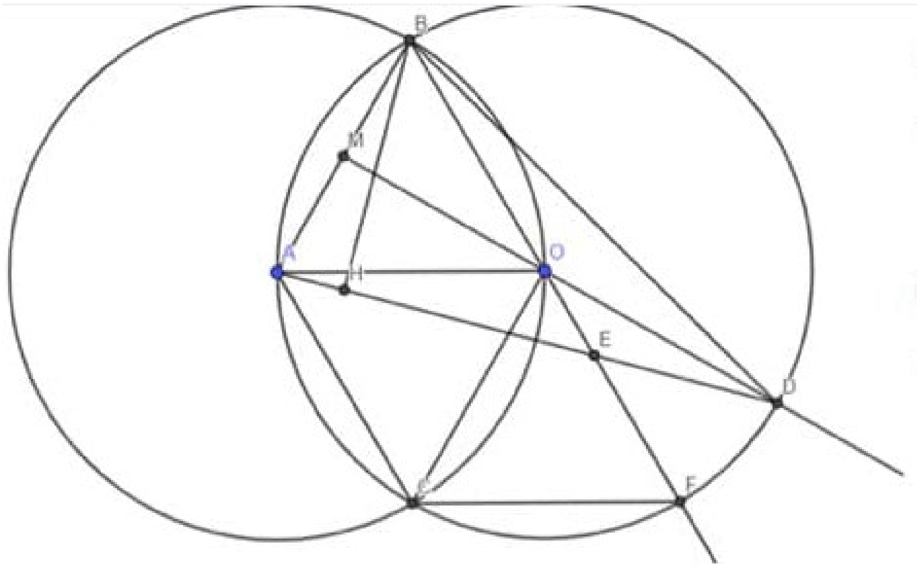
$\Rightarrow Q\le 6\sqrt{2}$

Vậy $Q_{\max}=6\sqrt{2}$ khi $k=\dfrac{29}{17}$.

Câu 5: (1,5 điểm)

Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm A nằm trên đường tròn. Đường tròn $(A;R)$ cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Gọi M là trung điểm của AB, tia MO cắt (O) tại điểm D. Tia BO cắt AD tại E và (O) tại điểm thứ hai là F. Tính độ dài đoạn thẳng DE và diện tích tứ giác $ACFE$ theo R.

Lời giải:



Ta có: $AO = AC = OC \Rightarrow \Delta AOC$ đều mà $\widehat{AOF} = 2\widehat{ABF} = 2.60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \Delta COF$ đều $\Rightarrow AOFC$ là hình thoi, AF cắt OC thì I là trung điểm AF.

Ta có: $AI = \cos\widehat{AOI}.AO = \sin 60^\circ.R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow AF = \sqrt{3}R$

$\Rightarrow S_{AOFC} = \dfrac{1}{2}OC.AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$

Ta có: $S_{AOE} = S_{ABE} - S_{ABO} = \dfrac{1}{2}BH.AE - \dfrac{1}{2}OM.AB$

$= \dfrac{1}{2}.\sin 75^\circ.AB(AH + HE) - \dfrac{1}{2}\sin 60^\circ.OB.AB$

$= \dfrac{1}{2}.\sin 75^\circ.R^2(\cos 75^\circ.AB + \sin 75^\circ.AB) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$

$= \dfrac{1}{2}.\sin 75^\circ.R^2(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$

$\Rightarrow S_{AEFC} = S_{AFOC} - S_{AOE} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2 - \dfrac{1}{2}\sin 75^\circ R^2(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)$.

Ta có: $\Delta EOD \backsim \Delta EDB \Rightarrow ED^2 = EO.EB$.

Ta có: $OA = OB = AB \Rightarrow \Delta OAB$ đều nên $\widehat{BOA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BDA} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEA} = 180^\circ - \widehat{OBA} - \widehat{DAB} = 180^\circ - 60^\circ - \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 45^\circ$

Kẻ $BH \perp AE \Leftrightarrow \Delta BHE$ vuông cân $\Rightarrow BE = BH.\sqrt{2}$

Ta có: $\sin\widehat{BAH} = \sin\dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \sin 75^\circ = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \sin 75^\circ.AB = \sin 75^\circ.R$

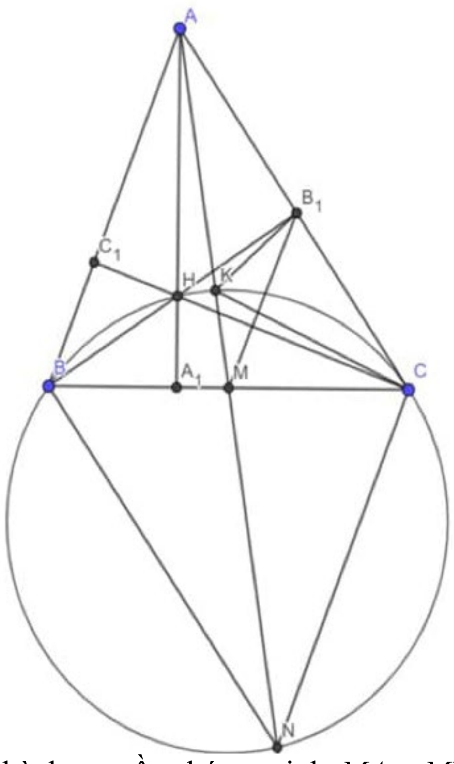
$\Rightarrow BE = \sqrt{2}\sin 75^\circ.R \Rightarrow EO = BE - R = R\left(\sqrt{2}\sin 75^\circ - 1\right)$

$\Rightarrow ED = \sqrt{\sqrt{2}\sin 75^\circ R^2(\sqrt{2}\sin 75^\circ - 1)}$.

Câu 6: (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC chọn $AB < AC$, trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC và K là hình chiếu của H trên AM. Tia AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng tứ giác $ABNC$ là hình bình hành.

Lời giải:



Cần chứng minh $ABNC$ là hình bình hành $\Rightarrow$ cần chứng minh $MA = MN$

Ta có: $BKCN$ nội tiếp $\Rightarrow MK.MN = MB.MC = MC^2$.

Thật vậy, gọi A_1, B_1, và C_1 lần lượt là chân đường cao từ A, B, C lên BC, AC, AB

Ta có: ΔBB_1C vuông có M là trung điểm BC nên $MB = MC = MB_1$.

Suy ra cần chứng minh $MB_1^2 = MK.MA$.

Ta có: $AHKB_1$ nội tiếp $\left(\widehat{AKG} = \widehat{AB_1H}\right) \Rightarrow \widehat{AKB_1} = \widehat{AHB_1}$.

A_1HB_1C nt $\Rightarrow \widehat{AKB_1} = \widehat{AHB_1} = \widehat{B_1CM} = \widehat{MB_1C} = 180^\circ - \widehat{AKB_1} = 180^\circ - \widehat{MB_1C} \Rightarrow \widehat{MKB_1} = \widehat{MB_1A}$

$\Rightarrow \Delta MKB_1 \backsim \Delta MB_1A \Rightarrow MK.MA$, suy ra điều phải chứng minh.

----------------------✡☺✡----------------------