SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2022 – 2023
KHÓA NGÀY 11 THÁNG 6 NĂM 2022
Môn thi chuyên: Toán
Ngày thi: 12 tháng 6 năm 2022
Thời gian làm bài: 150 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Bài 1: *(1,0 điểm)*

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Bài 2: *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x+4}+|x|=x^2-x-4$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{y+z}=2x-1\\ \dfrac{y}{z+x}=3y-1\\ \dfrac{z}{x+y}=5z-1\end{cases}$

Bài 3: *(1,5 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MAN}=45^\circ$.

a) Chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.

b) Kẻ MP song song với AN (P thuộc đoạn AB) và kẻ NQ song song với AM (Q thuộc đoạn AD). Chứng minh $AP=AQ$.

Bài 4: *(2,0 điểm)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$.

a) Chứng minh rằng $ab+bc+ca\leq 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{b^2+1}+\dfrac{b}{c^2+1}+\dfrac{c}{a^2+1}$.

Bài 5: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại I. Đường thẳng qua A vuông góc với IH tại K và cắt BC tại M.

a) Chứng minh tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\dfrac{BI}{BD}=\dfrac{CI}{CD}$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BC.

Bài 6: *(1,0 điểm)*

Số nguyên dương n được gọi là "số tốt" nếu $n+1$ và $8n+1$ đều là các số chính phương.

a) Hãy chỉ ra ví dụ ba "số tốt" lần lượt có 1, 2, 3 chữ số.

b) Tìm các số nguyên k thỏa mãn $|k|\leq 10$ và $4n+k$ là hợp số với mọi n là "số tốt".

- HẾT -

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2022
SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO TP HCM

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Văn Quý – Nguyễn Tiến Dũng
Dương Hồng Sơn – Phạm Duy Nguyên Lâm

1. Đề thi

Bài 1 (1.0 *điểm*). Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \left(x + \sqrt{1+y^2}\right)\left(y + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Bài 2 (2.5 *điểm*).

a) Giải phương trình
$$\sqrt{x+4} + |x| = x^2 - x - 4.$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} = 2x - 1, \\ \dfrac{y}{z+x} = 3y - 1, \\ \dfrac{z}{x+y} = 5z - 1. \end{cases}$$

Bài 3 (1.5 *điểm*). Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.

b) Kẻ đường thẳng MP song song với đường thẳng AN (P thuộc đoạn thẳng AB) và kẻ đường thẳng NQ song song với đường thẳng AM (Q thuộc đoạn thẳng AD). Chứng minh rằng $AP = AQ$.

Bài 4 (2.0 *điểm*). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh rằng
$$ab + bc + ca \le 3.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}.$$

Bài 5 (2.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm I. Đường thẳng qua điểm A vuông góc với đường thẳng IH tại điểm K và cắt đường thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$.

b) Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Bài 6 (1.0 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là "số tốt" nếu cả hai số $n + 1$ và $8n + 1$ đều là số chính phương.

a) Hãy chỉ ra ví dụ ba "số tốt" lần lượt có 1, 2, 3 chữ số.

b) Tìm tất cả các số nguyên k thỏa mãn $|k| \le 10$ và $4n + k$ là hợp số với mọi n là "số tốt".

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (1.0 *điểm*). Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $xy + \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \left(x + \sqrt{1 + y^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $(1 + x^2)(1 + y^2) = (1 - xy)^2$, hay $(x + y)^2 = 0$. Suy ra $y = -x$. Từ đó $M = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) = 1$. □

Bài 2 (2.5 *điểm*).

a) Giải phương trình

$$\sqrt{x + 4} + |x| = x^2 - x - 4.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y + z} = 2x - 1, \\ \dfrac{y}{z + x} = 3y - 1, \\ \dfrac{z}{x + y} = 5z - 1. \end{cases}$$

Lời giải. **a)** Điều kiện: $x \ge -4$. Đặt $a = |x|$ và $\sqrt{x + 4}$, khi đó $a + b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mặt khác, chú ý rằng a, b không thể cùng bằng 0 nên $a + b > 0$. Do đó $a - b = 1$, hay

$$|x| - 1 = \sqrt{x + 4}.$$

Xét các trường hợp $x \ge 0$ và $-4 \le x < 0$ rồi giải các phương trình tương ứng, ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ và $x = -\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

b) Điều kiện: $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$. Hệ phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{y+z} = 2x, \\ \dfrac{x+y+z}{z+x} = 3y, \\ \dfrac{x+y+z}{x+y} = 5z. \end{cases}$$

Nếu $x+y+z=0$ thì ta có $x=y=z=0$, suy ra $x+y=y+z=z+x=0$, mâu thuẫn. Do đó $x+y+z \neq 0$, và như thế, từ hệ phương trình, ta cũng có $xyz \neq 0$. Bây giờ, ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} x(y+z) = \dfrac{x+y+z}{2}, \\ y(z+x) = \dfrac{x+y+z}{3}, \\ z(x+y) = \dfrac{x+y+z}{5}. \end{cases}$$

Trừ tương ứng hai phương trình đầu của hệ trên, ta được $z(x-y) = \frac{x+y+z}{6}$. Kết hợp với phương trình thứ ba của hệ, ta được $\frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{6}$, hay $x = 11y$.

Trừ tương ứng hai phương trình thứ hai và thứ ba của hệ, ta được $x(y-z) = \frac{2(x+y+z)}{15}$. Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ, ta được $\frac{y-z}{y+z} = \frac{4}{15}$, hay $z = \frac{11}{19}y$.

Bây giờ, thay $x = 11y$ và $z = \frac{11}{19}y$ vào hệ ban đầu, ta thấy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,\ y,\ z)$ là $\left(\frac{239}{60},\ \frac{239}{660},\ \frac{239}{1140}\right)$. □

Bài 3 (1.5 *điểm*). Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.

b) Kẻ đường thẳng MP song song với đường thẳng AN (P thuộc đoạn thẳng AB) và kẻ đường thẳng NQ song song với đường thẳng AM (Q thuộc đoạn thẳng AD). Chứng minh rằng $AP = AQ$.

Lời giải. a) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$ và $AB = BC = CD = DA$. Gọi I là điểm đối xứng với điểm B qua đường thẳng AM. Khi đó, ta có $AI = AB$, $\angle AIM = \angle ABM = 90^\circ$ và $\angle MAI = \angle MAB$.

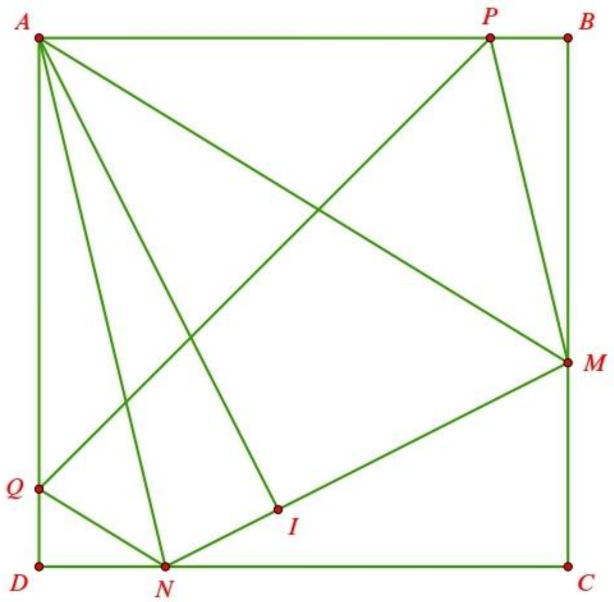
Do $AB = AD$ nên $AI = AD$. Do $\angle MAN = 45^\circ$ và $\angle DAB = 90^\circ$ nên

$$\angle DAN + \angle MAB = 45^\circ = \angle MAN.$$

Mà $\angle MAI = \angle MAB$ nên $\angle NAI = \angle NAD$. Từ đó $\triangle ANI = \triangle AND$ (c-g-c), suy ra

$$\angle AIN = \angle ADN = 90^\circ.$$

Do $\angle AIN = \angle AIM = 90^\circ$ nên ba điểm $M,\ I,\ N$ thẳng hàng và $AI \perp MN$.Cuối cùng, do $AI \perp MN$ và $AI = AB$ nên đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.



b) Do $MP \parallel AN$ và $MB \parallel AD$ nên $\angle BMP = \angle DAN$. Mà $\angle MBP = \angle ADN = 90^\circ$ nên $\triangle ADN \sim \triangle MBP$ (g-g). Suy ra $\frac{DN}{BP} = \frac{DA}{BM}$, hay $DN \cdot BM = BP \cdot DA$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $DN \cdot BM = BA \cdot DQ$. Mà $DA = BA$ nên $DQ = BP$. Từ đó $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 4 (2.0 *điểm*). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}.$$

Lời giải. a) Ta có $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$, từ đó suy ra

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

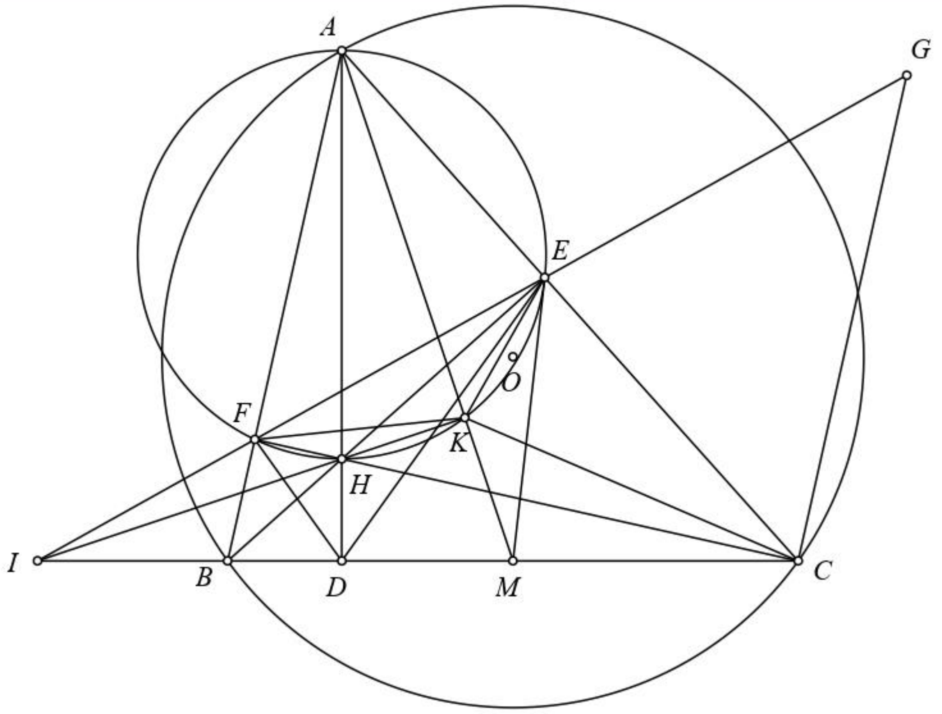
$$\begin{aligned} 3 - P = a + b + c - P &= \left(a - \frac{a}{b^2+1}\right) + \left(b - \frac{b}{c^2+1}\right) + \left(c - \frac{c}{a^2+1}\right) \\ &= \frac{ab^2}{b^2+1} + \frac{bc^2}{c^2+1} + \frac{ca^2}{a^2+1} \leq \frac{ab^2}{2b} + \frac{bc^2}{2c} + \frac{ca^2}{2a} = \frac{ab+bc+ca}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo câu **a)**, ta có $ab + bc + ca \leq 3$. Do đó $3 - P \leq \frac{3}{2}$, hay $P \geq \frac{3}{2}$. Mặt khác, với $a = b = c = 1$ thì $P = \frac{3}{2}$. Vậy $\min P = \frac{3}{2}$. □

Bài 5 (2.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm I. Đường thẳng qua điểm A vuông góc với đường thẳng IH tại điểm K và cắt đường thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$.

b) Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BC.



Lời giải. **a)** Do AD, CF là các đường cao của tam giác ABC và $IK \perp AM$ nên

$$\angle AFC = \angle ADC = \angle AKH = 90^\circ.$$

Suy ra các tứ giác $ACDF$ và $AFHK$ nội tiếp. Do đó, $\angle FCD = \angle FAD = \angle FKH$ hay $\angle FCI = \angle FKI$. Suy ra tứ giác $IFKC$ nội tiếp.

Qua điểm C, kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AB cắt đường thẳng EF tại điểm G. Áp dụng định lý Thales cho tam giác ICG với $BF \parallel CG$, ta có

$$\frac{IB}{IC} = \frac{BF}{CG}. \tag{1}$$

Ta thấy, hai tam giác BAD và BCF đồng dạng (g-g). Suy ra

$$\frac{BD}{BF} = \frac{AD}{CF}. \tag{2}$$

Ta có $CF \perp AB$ và $CG \parallel AB$, suy ra $CG \perp CF$ và $\angle CGF = \angle AFE$.

Vì $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Suy ra $\angle BCE = \angle AFE = \angle CGF$.

Xét hai tam giác DAC và CFG, có $\angle ADC = \angle FCG = 90^\circ$ và $\angle ACD = \angle CGF$. Do đó, hai tam giác DAC và CFG đồng dạng (g-g). Suy ra

$$\frac{AD}{CF} = \frac{DC}{CG}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), suy ra $\frac{BD}{BF} = \frac{DC}{CG}$. Vì thế $\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CG} = \frac{IB}{IC}$ (do (1)). Vậy $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$.

b) Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\angle BFI = \angle AFE = \angle BCE.$ (4)

Do $\angle AEH = \angle AFH = \angle AKH = 90^\circ$ nên năm điểm A, E, F, H, K cùng thuộc đường tròn đường kính AH. Suy ra $\angle AKE = \angle AFE.$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra $\angle AKE = \angle MCE$. Do đó, tứ giác $MCEK$ nội tiếp. Suy ra

$$\angle MEC = \angle MKC. \tag{6}$$

Ta có tứ giác $IFKC$ nội tiếp nên $\angle IKC = \angle IFC$. Suy ra $\angle BFI + 90^\circ = \angle MKC + 90^\circ$. Do đó, $\angle BFI = \angle MKC.$ (7)

Từ (4), (6) và (7), suy ra $\angle MEC = \angle MKC = \angle MCE$. Do đó, tam giác MEC cân tại đỉnh M. Suy ra $MC = ME$.

Chú ý rằng tam giác BCE vuông tại E, ta có

$$\angle MBE = 90^\circ - \angle MCE = 90^\circ - \angle MEC = \angle MEB.$$

Do đó, tam giác MBE cân tại đỉnh M. Suy ra $MB = ME$. Vậy $MB = ME = MC$, hay ta có M là trung điểm của đoạn thẳng BC. □

Bài 6 (1.0 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là "số tốt" nếu cả hai số $n+1$ và $8n+1$ đều là số chính phương.

- **a)** Hãy chỉ ra ví dụ ba "số tốt" lần lượt có 1, 2, 3 chữ số.
- **b)** Tìm tất cả các số nguyên k thỏa mãn $|k| \le 10$ và $4n+k$ là hợp số với mọi n là "số tốt".

Lời giải. Xét một "số tốt" n, ta thấy nếu n chia 3 dư 1 thì $n+1$ chia 3 dư 2, mâu thuẫn vì $n+1$ là chính phương; còn nếu n chia 3 dư 2 thì $8n+1$ cũng chia 3 dư 2, mâu thuẫn vì $8n+1$ là số chính phương. Do đó n là một bội của 3.

a) Dựa theo nhận xét trên, ta tìm được ví dụ về ba "số tốt" thỏa mãn yêu cầu là 3, 15 và 120.

b) Để ý rằng $4\cdot 3 - 1 = 11$, $4\cdot 3 - 10 = 2$, $4\cdot 3 - 5 = 7$, $4\cdot 3 - 7 = 5$, $4\cdot 3 - 9 = 3$, $4\cdot 3 + 1 = 13$, $4\cdot 3 + 5 = 17$, $4\cdot 3 + 7 = 19$ đều là số nguyên tố nên các số k thuộc tập $\{-1, -5, -7, -9, -10, 1, 5, 7\}$ đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta sẽ chứng minh các số còn lại, tức $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, 10, \pm 3, 9$, đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, giả sử tồn tại số $k \in \{0, -2, 2, -4, 4, -6, 6, -8, 8, 10, -3, 3, 9\}$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- **Với k chẵn:** Ta thấy tồn tại "số tốt" n sao cho $4n+k$ không là hợp số. Do $4n+k$ chia hết cho 2 và $4n+k \ge 4\cdot 3 - 8 > 1$ nên $4n+k$ phải là số nguyên tố và $4n+k = 2$. Mà n chia hết cho 3 nên k chia 12 dư 2, từ đó $k = 2$. Tuy nhiên, điều này dẫn đến $n = 0$, mâu thuẫn. Như vậy, tất cả các số k chẵn thuộc tập $\{-2, -4, -6, -8, 2, 4, 6, 8, 10\}$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- **Với k lẻ:** Ta thấy tồn tại "số tốt" n sao cho $4n+k$ không là hợp số. Do $4n+k$ chia hết cho 3 và $4n+k \ge 4\cdot 3 - 3 > 1$ nên $4n+k$ phải là số nguyên tố và $4n+k = 3$, mâu thuẫn vì $4n+k \ge 4\cdot 3 - 3 = 9$.

Vậy, tập hợp các số k thỏa mãn yêu cầu là $\{0, -2, 2, -4, 4, -6, 6, -8, 8, 10, -3, 3, 9\}$. □